Univerzitet u Tuzli
Prirodno - matematički fakultet
Odsjek matematika

Magistarski rad

Primjena diferencijalne geometrije u teorijama gravitacije

Elvis Baraković

Tuzla, mart 2011. godine

Sažetak

U ovom radu se bavimo sa kvadratnom metrički afinom gravitacijom (KMAG) koja je jedna od alternativnih teorija gravitacije. U radu su predstavljene osnove diferencijalne geometrije koje su fundamentalne za razumijevanje i izučavanje teorija gravitacije.
Predstavljeni su klasični i generalizirani pp-talasi, njihova matematička i fizička svojstva, te činjenica da oni zadovoljavaju jednačine polja KMAG.
Velika pažnja u ovom radu je posvećena tenzorima i tenzorskom računu. Koristeći se tim jezikom, u dijelu ovog rada, konstruisane su nove eksplicitne jednačine polja uz određene uslove. Pokazano je da generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom zadovoljavaju novodobijene jednačine.
Ideja u nastavku bavljenja ovim problemom, jeste da se pokuša konstruisati nova klasa prostorvremena koja bi zadovoljavala novodobijene jednačine polja, te također dati njihovo fizikalno objašnjenje.

Summary

In this work we deal with quadratic metric–affine gravity (QMAG), which is one of alternative theories of gravity. We present the basics of differential geometry which are fundamental in understanding and studying the theories of gravity.
We present classical and generalised pp-waves, their mathematical and physical properties and the fact that they satisfy the field equations of QMAG.
Great care is given to tensors and tensor calculus. Using the laguage of tensors, in parts of this work, we construct new representations of field equations under certain assumptions. We show that generalised pp-waves with parallel Ricci curvature satisfy these equations.
The idea in the cotinuation of dealing with this problem is to try to construct a class of new spacetimes which would be solutions of these field equations and to give their physical interpretation.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Ovaj rad je pokušaj nastavka razvoja alternativnih teorija gravitacije, koristeći se jezikom diferencijalne geometrije. Krajem XIX. i početkom XX. vijeka, fizika se suočila sa mnogim problemima. Tvrdnje Newtonove klasične mehanike, koje su godinama smtrane tačnim i koje su mnogo puta provjerene, suočile su se sa novim tvrdnjama Maxwellove elektrodinamike. Mnogi vodeći naučnici tog vremena ulagali su mnogo truda da riješe nesaglasnost klasične mehanike i elektrodinamike, ali sa malo ili bez uspjeha. Tek 1905. godine, mladi fizičar Albert Einstein [3] riješio je problem i zaključio da je Newtonova klasična mehanika samo približno tačna teorija kad su brzine male u odnosu na brzinu svjetlosti, a Maxwellova elektrodinamika je ispravna teorija bez bilo kakvih ograničenja. Klasična teorija gravitacije nije se uklapala u okvire specijalne teorije relativnosti. Problem je riješio Albert Einstein objavljujući svoju generalnu teoriju relativnosti 1915. godine. U ovom radu, kao posebnu alternativnu teoriju gravitacije, proučavamo *metrički afinu gravitaciju*, za čiji se model jedno vrijeme zalagao i sam Einstein.

1.1 Specijalna i generalna teorija relativnosti

Početkom XX stoljeća Einstein je objavio svoj rad o teoriji relativnosti. Teorija relativnosti donijela je velike promjene u zakonima klasične fizike u čiju tačnost niko nikad prije nije sumnjao. Velika promjena se desila u shvatanju pojma vremena. Naime, prije teorije relativnosti, naučnici kao što su Newton i Galilej, kao i mnogi drugi, vjerovali su u apsolutno vrijeme. Smatrali su da vrijeme nezavisno od bilo čega egzistira i nezavisno je od prostora. Vremenski interval moguće je izmjeriti između bilo koja dva događaja i ne zavisi od toga ko ga mjeri. Ta teorija je bila logična i teorija koju je zdrav razum nametao. Albert Einstein je svojom teorijom ujedinio prostor i vrijeme, uveo novi pojam *prostorvrijeme* i vrijeme posmatrao kao jednu posebno dimenziju u četverodimenzionalnom prostorvremenu. Teorija relativnosti se sastoji iz dva dijela, *Specijalne teorije relativnosti*, koja je prva objavljena 1905. godine i *Generalne teorije relativnosti* koja je objavljena 1915. godine. U specijalnoj teoriji relativnosti, posmatraju se samo inercijalni sistemi referencije, tj. sistemi koji se jedni u odnosu na druge ne kreću ili se kreću konstantnom brzinom, dok je u generalnoj teoriji ta činjenica generalizovana, pa se posmatraju i sistemi koji se jedni u odnosu na druge kreću i određenim ubrzanjem. Specijalna teorija relativnosti se zasniva na dva postulata:

(*i*) u inercijalnim sistemima svi fizički zakoni se iskazuju na isti način;

(*ii*) brzina svjetlosti u svim inercijalnim sistemima je ista.

Drugi aksiom je donio neslaganja, jer se protivio zdravom razumu i činjenici da je brzina svjetlosti svugdje ista i da je to maksimalna moguća brzina. Ipak, Einstein ga je uzeo za jedan od osnovnih postulata i svoju teoriju izgradio na tome. Dvije osnovne posljedice specijalne teorije relativnosti su kontrakcija dužina i dilatacija vremena. Ovo drugo je imalo poseban značaj, obzirom na to što se protivilo sa pojmom o apsolutnom vremenu. Specijalna teorija relativnosti je dala veoma dobro objašnjenje o tome da brzina svjetlosti ima istu vrijednost za sve posmatrače kao i kretanja tijela bliska brzini svjetlosti. Međutim, specijalna teorija relativnosti je bila u nesuglasici sa Newtonovom teorijom gravitacije koja je tvrdila da se tijela međusobno privlače silom koja je obrnuto proporcionalna udaljenosti između njih. Ali ako bi se jedno tijelo udaljilo od drugog, to bi značilo da se smanji i gravitaciona sila između njih i to u istom trenutku, istovremeno. Međutim, o pojmu istovremenosti je u specijalnoj teoriji relativnosti besmisleno govoriti. To znači da se gravitaciona sila prenosi beskonačnom brzinom što se protivilo drugom aksiomu. Einstein je nekoliko puta pokušao da objasni tu činjenicu, a rezultat tih razmišljanja bilo je objavljivanje generalne teorije relativnosti 1915. godine, koja se još naziva i Einsteinova teorija gravitacije. Bitna stvar koju je ponudila Einsteinova teorija a nije mogla Newtonova teorija gravitacije bile su tačne jednačine kretanja planeta oko Sunca. Krajnji rezultat Einsteinove teorije je imao male razlike od Newtonove. I jedan i drugi su pokazali da se planete oko sunca kreću po eliptičnim putanjama, s tim što je Newtonova teorija tvrdila da su te elipse stacionarne, dok je Einstein pokazao da elipse vremenom rotiraju u prostoru, što je kasnije i potvrđeno. Za razliku od Newtonove teorije koja je gravitaciju posmatrala kao silu, Einstein je tvrdio da je gravitacija posljedica zakrivljenosti prostorvremena. Prostorvrijeme nije "ravno" nego je "zakrivljeno" zbog rasporeda materije i energije u

njemu. Tijela u četverodimenzionalnom prostorvremenu, po prirodi stvari, nastoje da se kreću po "pravoj liniji", ali nama čiji um shvata prostor u kojem živimo kao trodimenzionalan izgleda da je to "zakrivljeno". Pod izrazom "kreću po pravoj liniji" podrazumijevamo da se tijela kreću po geodezijskoj liniji, tj. nastoje da put između dvije tačke pređu po najkraćem mogućem putu.
Mada je generalna teorija relativnosti riješila mnoge probleme, sam Einstein nije bio u potpunosti zadovoljan, jer nije uspio da gravitaciono polje i elektromagnetno polje spoji u jedan model.
Einsteinovu geometrijsku teoriju gravitacije možemo shvatiti kao: prostorvrijeme govori materiji kako da se kreće a materija govori prostorvremenu kako da se zakrivi. Ali, materija ne samo da zakrivljuje prostor. Budući da se radi o prostorvremenu, četverodimenzionalnom prostoru, nešto se moralo dešavati sa četvrtom, vremenskom koordinatom. Generalna teorija relativnosti tvrdi da gravitacija "zakrivljuje i vrijeme", tj. u blizini tijela sa velikom masom, prostor je toliko zakrivljen da i vrijeme sporije teče.
Centralni dio u generalnoj teoriji relativnosti zauzimaju Einsteinove jednačine koje daju direktnu vezu između geometrije prostorvremena i osobina materije. Einstein je svoju teoriju gravitacije izgradio koristeći jezik Riemannove geometrije, gdje su geometrijska svojstva prostorvremena opisana sa metrikom.
Vakuumsku Einsteinovu jednačinu

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.1}$$

dobijamo varijacijom Einstein-Hilbertove akcije[1]

$$\frac{1}{2k}\int \mathcal{R}\sqrt{|\det g|}. \tag{1.2}$$

pri čemu je $\mathcal{R}$ skalarna krivina, Ric tenzor Ricci krivine i k univerzalna konstanta za metriku g. Jednačina punog polja ima oblik

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{1.3}$$

pri čemu je $T_{\mu\nu}$ tenzor energije. Za više detalja, vidjeti na primjer [13].
Generalna teorija relativnosti je veoma dobar model za izračunavanje i objašnjavanje mnogih fizičkih fenomena. Međutim, mnogo je otvorenih pitanja ostalo, kao što je nedovršena *teorija svega.* Mnogi naučnici poslije Einsteina nastavili su njegov rad i stvaranje teorije svega.

[1] Za detaljan račun vidjeti Dodatak D.

1.2 Metrički afina gravitacija

Postoji nekoliko različitih alternativnih teorija gravitacije koje pokušavaju da unaprijede završetak Einsteinove teorije gravitacije. Metrički afina gravi–tacija je alternativna teorija gravitacije koju je neko vrijeme propagirao i sam Einstein.

Razvoj fizike je doveo do razmatranja mogućnosti da tretman prostorvremena može uključivati više od samo Riemannovog prostorvremena Einsteinove gene–ralne relativnosti. Neki od njih su:

- nemogućnost kvantizacije gravitacije;
- generalizacija trodimenzionalne teorije elastičnih kontinuuma sa mikro–strukturom na četverodimenzinalno prostorvrijeme gravitacije;
- proučavanja ranog svemira;
- ubrzavanje svemira;
- ....

Odvajanje od Riemannovog prostorvremena Einsteinove generalne relati–vnosti, dovodi do dodavanja torzije, što dovodi do Riemann–Cartanovog prostorvremena i moguće nemetričnosti, što dalje dovodi do metrički afinog prostorvremena.

Metrički afina gravitacija je generalizacija Einsteinove generalne teorije rela–tivnosti, koja se zasniva na prostorvremenu sa Riemannovom metrikom g Lorentzijanskog potpisa. U metrički afinoj gravitaciji, prostorvrijeme po–smatramo kao povezanu realnu četverodimenzionalnu mnogostrukost M sna–dbjevenu sa Loretzovom metrikom g i afinom konekcijom Γ. Primijetimo da karakterizacija prostorvremena sa nezavisnom linearnom konekcijom Γ odmah u početku razdvaja metrički afinu gravitaciju od generalne relativnosti. Konekcija uključuje inercijalne osobine prostorvremena i može se posmatrati, kao što je rekao Hermann Weyl u [26] kao polje vodilja prostorvremena. Metrika opisuje strukturu prostorvremena u odnosu na njegove prostornovre-menske osobine. Prostorvrijeme metrički afine gravitacije reducira se na pro–stor vrijeme generalne relativnosti pod pretpostavkama da torzija konekcije Γ jednaka nuli i da je konekcija metrički kompatibilna. Deset nepoznatih komponenti metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$ i 64 nepoznata koeficijenta konekcije ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$ su nepoznate ove teorije. Početak razvoja ove teorije se nalazi u radovima É. Cartana, A. S. Eddingtona, A. Einsteina i H. Weyla, a pregled ove teorije se može naći, u radovima Hehla [7].

1.3 Kvadratna metrički afina gravitacija

U kvadratnoj metrički afinoj gravitaciji, akciju definišemo sa

$$S := \int q(R) \tag{1.4}$$

pri čemu je q $O(1,3)$ invarijantna kvadratna forma krivine R čiji koeficijenti zavise samo od metrike. Nezavisnim varijacijama po metrici g i po konekciji Γ dobijamo sistem Lagrange-Eulerovih jednačina, koje simbolički možemo zapisati u obliku

$$\frac{\partial S}{\partial g} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Gamma} = 0. \tag{1.6}$$

Naš cilj jeste proučavanje sistema jednačina (1.5), (1.6), koji je sistem od 74 parcijalne diferencijalne jednačine sa 74 nepoznatih. Proučavanje sistema jednačina (1.5), (1.6) za čisto kvadratnu formu ima dugu historiju i može se naći u radovima Weyla [26], Paulija [18], Eddingtona [2] i Lanczosa [10, 11, 12].
Motivacija dolazi od Yang-Millsove teorije. Yang-Millsova teorija za afinu konekciju je specijalan slučaj od (1.4), pri čemu je

$$q(R) = q_{YM}(R) := R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}. \tag{1.7}$$

Sa ovim izborom kvadratne forme, jednačina (1.6) se naziva Yang-Millsova jednačina za afinu konekciju, a jednačina (1.5) komplementarna Yang-Millsova jednačina, čiji je naziv uveo Vassiliev u [9]. Yang-Millsovu jednačinu prvo je analizirao Yang [27], pri čemu je jednačinu (1.6) specijalizovao za Levi-Civita konekciju i dobio jednačinu

$$\nabla_{\lambda} Ric_{\kappa\mu} - \nabla_{\kappa} Ric_{\lambda\mu} = 0. \tag{1.8}$$

Ideja korištenja čisto kvadratnih akcija doseže do Hermanna Weyla, koji je u [26] pojasnio da većina prirodnih gravitacionih akcija treba da budu kvadratne po krivini i uveo sve moguće invarijantne kvadratne kombinacije za krivinu. Nažalost, poslije toga nikada nije nastavio sa tom analizom.
U metrički afinoj gravitaciji, kao što je pojašnjeno u Dodatku B, postoji 11 ireducibilnih dijelova krivine. U kvadratnoj metrički afinoj gravitaciji, kvadriranjem ovih dijelova, dobijamo 11 izraza u kvadratnoj akciji. Međutim, pokazano je da se situacija komplikuje jer su određeni potprostori 96 dimenzionalnog prostora krivine $\mathbf{R}$, izomorfni, čime dobijamo 16 načina kvadriranja 11 dijelova krivine, ako što su naglasili Hehl i Macias u [8].

1.4 Rješenja kvadratne metrički afine gravitacije

U ovom dijelu daćemo pregled svih poznatih rješenja sistema jednačina (1.5), (1.6). Rješenja su podijeljena u dvije klase: Riemannova i ne Riemannova rješenja.

1.4.1 Poznata Riemannova rješenja

Riječ "Riemannovo" ima različita tumačenja. U teorijskoj fizici metrika je obično Lorentzijanskog potpisa, dok riječ "Riemannovo" upućuje da je konekcija Levi-Civita. U ovom radu, mi ćemo koristiti sljedeću definiciju:

Definicija 1.4.1 *Prostorvrijeme* $\{M, g, \Gamma\}$ *nazivamo Riemannovim ako je konekcija Levi-Civita, tj.* ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$.

U protivnom, za prostorvrijeme kažemo da je ne Riemannovo. Važno je primijetiti, da traženjem Riemannovih rješenja sistema (1.5), (1.6), varijacije akcije koje daju sistem (1.5), (1.6) i dalje se posmatraju nezavisno. Tek poslije izračunavanja varijacija, uvrštavamo da je konekcija Levi–Civita. Yang je proučavao jednačinu (1.8) i zaključio da je Einsteinovi prostori rješenja ove jednačine. Kasnije je pokazano od strane mnogih autora, da ako izaberemo kvadratnu formu (1.7), tada Einsteinovi prostori zadovoljavaju sistem (1.5), (1.6).

Jedan od velikih problema za sistem (1.5), (1.6) bio je uspostava jedinstvenog rezultata. Čak i za jednostavan Yang-Mills slučaj (1.8), to je bio veliki problem. Pokušaj Fairchilda [4] da pokaže da jedino Einsteinovi prostori zadovoljavaju sistem jednačina (1.5), (1.6) ispostavio se netačnim, što je i on sam kasnije potvrdio u [5].

Napredno proučavanje sistema jednačina (1.5), (1.6) u generalnom slučaju kvadrane akcije sa 16 članova kvadrata krivine je obavljena nedavno. Vassiliev [24] je 2005. godine riješio problem egzistencije i rješenja sistema (1.5), (1.6). On je pokazao da su

- Einsteinovi prostori,
- pp-prostori sa paralelnom Ricci krivinom, i
- Riemannova prostorvremena koji imaju skalarnu krivinu nula, i lokalno su proizvod Einsteinovih 2-mnogostrukosti,

jedina Riemannova rješenja sistema jednačina (1.5), (1.6), čime je problem konačno riješen. Ranije nije bilo primijećeno da su pp-prostori rješenja sistema jednačina (1.5), (1.6), mada su u teorijskoj fizici pp-talasi bili poznati.

Definicija 1.4.2 *Einstenov prostor je Riemannovo prostorvrijeme za koje je* $Ric = \Lambda g$*, pri čemu je* Λ *neka kosmološka konstanta.*

1.4.2 Poznata ne Riemannova rješenja

Veliki je broj radova posvećenih pronalaženju ne Riemannovih rješenja sistema jednačina (1.5), (1.6), tj. prostorvremena sa torzijom. U ovom radu prezentujemo metrički kompatibilno ne Riemannovo rješenje. Konstrukciju takvog prostorvremena, uradio je Vassiliev u [24].

Definicija 1.4.3 *Prostorvrijeme* $\{M, g, \Gamma\}$ *nazivamo pseudoinstanton ako je konekcija metrički kompatibilna a krivina ireducibilna i jednostavna.*

Metrička kompatibilnost znači $\nabla g = 0$. Ireducibilnost krivine znači da su svi od 11 ireducibilnih dijelova (osim jednog) jednaki nuli. Jednostavnost znači da ireducibilni dio krivine koji obezbjeđuje da krivina nije nula, nije izomorfan niti jednom drugom ireducibilnom dijelu. U tom slučaju, prateći Dodatak B, jedino su moguća tri pseudoinstantona

- *skalarni pseudoinstanton*, gdje je ireducibilni dio $R^{(1)}$ različit od nule,
- *pseudoskalarni pseudoinstanton*, gdje je ireducibilni dio $R_*^{(1)}$ različit od nule,
- *Weylov pseudoinstanton*, gdje je ireducibilni dio $R^{(10)}$ različit od nule.

Vassiliev [24] je dokazao sljedeći teorem

Teorem 1.4.1 *Pseudoinstanton je rješenje sistema jednačina (1.5), (1.6).*

Konstrukciju jednog pseudoinstantona uradio je Vassiliev [24], pri čemu je posmatrao trivijalnu mnogostrukost $M = \mathbb{R}^4$ opskrbljenu sa globalnim koordinatama (x^0, x^1, x^2, x^3) i metrikom Minkowskog $\eta_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Neka je $l \neq 0$ konstantan realan vektor, $m \neq 0$ konstantan kompleksan vektor i neka je

$$A(x) = m e^{-ilx} \tag{1.9}$$

ravni talas koji je rješenje polarizovane Maxwellove jednačine

$$*dA = \pm i dA. \tag{1.10}$$

Definišimo torziju sa

$$T := \frac{1}{2} Re(A \otimes dA) \tag{1.11}$$

i neka je Γ odgovarajuća metrički kompatibilna konekcija. Tada je, kako je pokazano u [23], opisano prostorvrijeme Weylov pseudoinstanton, pa je na osnovu Teoreme 1.4.1, rješenje sistema jednačina (1.5), (1.6). Opisani pseudoinstanton, koji je nazvan *torzijski talas*, u nešto drugačijoj formi, u Yang-Mills slučaju (1.7) ranije je otkriven od strane Singha i Griffithsa, da bi ga kasnije pokazali King i Vassiliev u [9]. U ovom smislu, interesantna su i dva rada Singha, [21] gdje je konstruisao rješenja sistema (1.5), (1.6) u vakuumu sa čisto aksijalnom torzijom, i [22] gdje je predstavio rješenja sa čisto trag torzijom.

1.5 Teleparalelizam

Pored metrički afine gravitacije, postoji još nekoliko alternativnih teorija gravitacije. U ovom radu nećemo ulaziti u detalje vezane za druge alternativne teorije, budući da nijedna od njih nije korištena u ovom radu.
Posebno mjesto u alternativnim teorijama gravitacije zauzima i *teleparalelizam*. Tu teoriju je koristio i Einstein kada je pokušao da objedini elektromagnetizam i gravitaciju. Teorija teleparalelizma ima dugu historiju, i počeci razvoja ove teorije mogu se naći u radovima Élie Cartana, Rolanda Weitzenböcka i Alberta Einsteina.
Osnovna ideja teleparalelizma je da radimo sa Lorentzijanskom metrikom, nestajućom krivinom i nenestajućom torzijom, što možemo posmatrati kao poseban slučaj metrički afine gravitacije. Postavke teleparalelizma su u suprotnosti sa standardnim postavkama generalne relativnosti, tj. da je torzija nestajuća a krivina nenestajuća. U današnjim izučavanjima, teleparalelizam se obično posmatra kao teorija gravitacije bez pokušaja objedinjavanja sa elektromagnetizmom.
Zanimljiv rezultat u vezi teleparalelizma može se naći u [25] gdje je data nova reprezentacija za Weylov lagranžian. Geometrijski objekti kojima se koristimo u teleparalelizmu su metrika, diferencijalne forme, vanjski proizvod i vanjski izvod. Prednost pristupa sa teleparalelizmom je u tome što ne zahtijeva korištenje spinora, Paulijevih matrica i kovarijantnog izvoda.

1.6 Struktura rada i glavni rezultati

Ovaj rad je podijeljen u nekoliko dijelova

- U Glavi 2 dat je pregled diferencijalne geometrije kojom se koristimo u ovom radu. U Sekciji 2.1 uvedeni su pojmovi topološke mnogostrukosti, atlasa, lokalnih koordinata. Posebna pažnja je data objašnjenju ta–ngentnog i kotangentnog prostora topološke mnogostrukosti. U Sekciji 2.2, uveden je pojam tenzora sa kojim se najviše koristimo u ovom radu. Objašnjeni su i pojmovi diferencijalne forme, vanjskog izvoda i Hodgeove zvjezdice kao posebnog operatora kojeg koristimo u prezentovanom tenzorskom računu. Sekcija 2.3 sadrži definicije Lie grupe i Lie algebre sa elementarnim primjerima. Posebna pažnju smo obratili pri pisanje Sekcije 2.4, gdje su detaljno pojašnjeni pojmovi Riemannove i ne Riemannove mnogostrukosti kao i metričkog tenzora. U Sekciji 2.5 kratko je pojašnjen pojam afine i metričke konekcije kao i pojam geodezije. Na kraju, u Sekciji 2.6 uveden je pojam krivine i torzije sa čim se mnogo koristimo u ovom radu. Također, data je i notacija sa kojom se koristimo u tenzorskom računu ovog rada. U Sekciji 2.7 dat je kratak pregled Paulijevih matrica u prostoru Minkowskog.

- U Glavi 3 dat je kratak pregled klasičnih i generaliziranih pp-talasa, kao i njihovih matematičkih i fizičkih svojstava. U Sekciji 3.1 upoznajemo se za klasičnim pp-talasima koji su od ranije već mnogo korišteni u teorijskoj fizici. Sekcija 3.2 predstavlja rezultat rada Vedada Pašića pri izradi njegove doktorske disertacije [16], gdje je generalizaciju pp-talasa izvršio korištenjem torzijskog talasa, koji je ranije opisan i pokazao da su generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom, rješenja sistema (1.5), (1.6).

- Glava 4 se sastoji iz četiri Sekcije. U Sekciji 4.1 dat je glavni rezultat rada, tj. jednačine polja (1.5), (1.6) uz korištenje određenih uslova. Sekcija 4.1 je rezultat računa koji je urađen u Sekciji 4.2 i Sekciji 4.3 gdje je kvadratna forma varirana po metrici, odnosno po konekciji. U Sekciji 4.4 dokazana je Lema koja govori da su generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom zadovoljavaju novodobijene jednačine polja (4.1) i (4.2).

- Konačno Dodatak A, Dodatak B, Dodatak C i Dodatak D sadrže veoma bitne matematičke račune koji su korišteni da bi se došlo do glavnog rezultata rada. Također, njihovi dijelovi predstavljaju mnogo originalnog rada, ali najveći dio prati [16]. U Dodatku A opisani su ireducibilni dijelovi torzije a u Dodatku B ireducibilni dijelovi krivine. Dodatak C nudi račun vezan za Bianchijev identitet za krivinu, a u Dodatku D nalaze se detaljni računi varijacija kvadratnih formi korištenih u ovom radu.

Poglavlje 2

Matematička predznanja i notacija

U ovoj glavi predstavljamo osnove diferencijalne geometrije koje su fundamentalne za razumijevanje i izučavanje teorija gravitacije. Izlaganje gradiva uglavnom prati [15] i [20]. Na kraju predstavljamo notaciju kojom se koristimo u ovom radu.

2.1 Topološke mnogostrukosti

Neka je M $m-$dimenzionalan Hausdorffov topološki prostor. Uređeni par (U, φ) otvorenog skupa U skupa M i homeomorfizma $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ iz U na otvoreni podskup skupa $\mathbb{R}^m$ naziva se *karta* a skup U *koordinatna okolina*. Ako imamo familiju $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ karti na prostoru M, pri čemu je $\bigcup_{i\in I} U_i = M$, tada kažemo da je M $m-$dimenzionalna *topološka mnogostrukost* sa *atlasom* $\mathcal{A}$.
Kažemo da je atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ klase C^∞ (ili *gladak*) ako za otvorene skupove U_i i U_j, takve da je $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, preslikavanje $\psi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ je klase C^∞, a takve mnogostrukosti nazivamo C^∞ *mnogostrukostima* ili *diferencijabilnim mnogostrukostima*.
Neka su u^i, $(i = 1, 2, ..., m)$ koordinate u prostoru $\mathbb{R}^m$. Za kartu $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ elemente $x^i_\alpha = u^i \circ \varphi_\alpha$, $(i = 1, 2, ..., m)$ nazivamo *lokalnim koordinatama*.
Kažemo da je karta (U, φ) *kompatibilna* sa C^∞ atlasom $\mathcal{A}$ ako su preslikavanja $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ i $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ klase C^∞ kad god je $U \cap U_\alpha \neq \varnothing$. Tada sve karte kompatibilne sa atlasom $\mathcal{A}$ formiraju maksimalan atlas koji sadrži $\mathcal{A}$, a njihove koordinatne okoline formiraju bazu toplogije M.
Jednostavnijim riječima, $m-$dimenzionalna mnogostrukost je topološki prostor koji je *lokalno* homeomorfan sa $\mathbb{R}^m$, a može da se razlikuje od $\mathbb{R}^m$ *glo–*

balno. Lokalna homeomorfnost nam daje mogućnost da svakoj tački P mnogostrukosti M pridružimo uređenu $m-$torku realnih brojeva koje nazivamo lokalnim koordinatama pa na mnogostrukostima možemo primijeniti račun funkcija više promjenljivih.
Neka je $f : M \to \mathbb{R}$ realna funkcija na diferencijabilnoj mnogostrukosti M. Kažemo da je f klase C^∞ u tački $P \in M$ ako je $f \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ klase C^∞ u $\varphi_\alpha(P)$, pri čemu je $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ karta oko tačke $P \in U_\alpha$. Skup realnih funkcija f definisanih na otvorenom podskupu $V \subset M$ i klase C^∞ označavamo sa $\mathcal{F}(V)$. Skup $\mathcal{F}(V)$ je algebra u odnosu na uobičajeno sabiranje i množenje funkcija. Također, sa $\mathcal{F}(P)$ označavamo skup funkcija klase C^∞ definisanih u okolini tačke $P \in M$.
Neprekidno preslikavanje $\Phi : M \to N$ između diferencijabilnih mnogostrukosti M i N je preslikavenje klase C^∞ ako je $f \circ \Phi \in \mathcal{F}(M)$ kad god je $f \in \mathcal{F}(N)$. Ako je preslikavanje $\Phi : M \to N$ bijektivno i klase C^∞ tada je preslikavanje $\Phi^{-1} : N \to M$ također klase C^∞, i za preslikavanje Φ kažemo da je *difeomorfizam*, a za mnogostrukosti M i N *difeomorfne.*
Homeomorfizmi klasifikuju prostore koji se jedni u druge mogu preslikati neprekidno, dok difeomorfizmi klasifikuju prostore koji se jedni u druge mogu preslikati glatko. Dva difeomorfna prostora se posmatraju kao ista mnogostrukost. Značaj diferencijabilnih mnogostrukosti leži u činjenici da možemo da koristimo uobičajeni diferencijalni račun razvijen u $\mathbb{R}^m$. Glatkoća koordinatnih transformacija osigurava da je račun nezavisan od izabranog koordinatnog sistema.

Primjer 2.1.1 *Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je trivijalan primjer $n-$dimenzionalne mnogostrukosti pri čemu jedna karta pokriva cijeli prostor. Preslikavanje φ može biti identično preslikavanje.*

Primjer 2.1.2 *Neka je $n = 1$. Ako zahtjevamo da je M povezana mnogostrukost, tada su $\mathbb{R}$ i kružnica S^1 jedine moguće mnogostrukosti.*

Primjer 2.1.3 *$n-$ dimenzionalna sfera S^n je diferencijabilna mnogostrukost.*

Neka je M $m-$dimenzionalna mnogostrukost sa atlasom $\{(U_i, \varphi_i)\}$ i neka je N $n-$dimenzionalna mnogostrukost sa atlasom $\{(V_j, \psi_j)\}$. Tada je proizvod mnogostrukosti $M \times N$ $(m+n)-$dimenzionalna mnogostrukost čiji je atlas $\{(U_i \times V_j), (\varphi_i, \psi_j)\}$. Tačka iz $M \times N$ je oblika (p, q) pri čemu su $p \in M, q \in N$, a djelovanjem koordinatne funkcije (φ_i, ψ_j) na tačku (p, q) dobijamo $(\varphi_i(p), \psi_j(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$.
Kriva u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru je parametrizovana sa jednim parametrom t sa $(x(t), y(t), z(t))$ dok je površ parametrizovana sa dva

parametra u, v sa $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Kriva i površ su lokalno homeomorfne sa $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$, respektivno. Mnogostrukosti su generalizacija ideje o krivim i površima na objekte proizvoljne dimenzije. Glatke krive i glatke površi u Euklidskom prostoru mogu u svakoj tački biti aproksimirane sa ta–ngentim linijama odnosno tangentnim površima, respektivno, što su linearni objekti.

Neka je (a,b) otvoreni interval koji sadrži 0. Preslikavanje $c : (a,b) \to M$ klase C^∞ pri čemu je $c(0) = P$ naziva se *kriva* kroz tačku P. Tangentni prostor ćemo definisati kao prostor tangentnih vektora $\dot{c}(0)$ na krivu c koji prolaze kroz tačku P. Iako ne možemo definisati izvod $\dot{c}(0)$ kao u Euklidskom prostoru, možemo posmatrati usmjerenu derivaciju $Xf := \frac{d}{dt}|_{t=0} f(c(t))$ funkcije $f \in \mathcal{F}(P)$ koja ima osobine

$$X(af + bg) = aXf + bXg, \quad X(fg) = f(P)Xg + g(P)Xf. \tag{2.1}$$

pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}; f, g \in \mathcal{F}(P)$. Sada operator X možemo definisati kao $\dot{c}(0)$ i zvati ga *tangentni vektor* na krivu c u tački P. Generalno, funkcional $X : \mathcal{F}(P) \to \mathbb{R}$ koji zadovoljava uslove (2.1) nazivamo derivacija funkcije $f \in \mathcal{F}(P)$. Skup svih derivacija funkcija prostora $\mathcal{F}(P)$ čini vektorski prostor ako definišemo $(aX + By)f := aXf + bYf$ za sve derivacije X, Y i sve realne brojeve a, b. Ovaj vektorski prostor označavamo sa $T_P M$ i nazivamo ga *ta–ngentni prostor* na mnogostrukost M u tački P. Prostor $TM = \bigcup_{P \in M} T_P M$ nazivamo *tangentni omotač* mnogostrukosti M.

Skup $T_P M$ ima strukturu vektorskog prostora čija je dimenzija m i čija je baza skup $\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$ koja se naziva *koordinatna baza.* Koristeći ovu bazu, svaki element prostora $v \in T_P M$, poštujući Einsteinovu konvenciju o sabiranju, može biti zapisan u obliku

$$v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Dualni vektorski prostor tangentnog prostora $T_P M$ naziva se *kotangentni prostor* i označavamo ga sa $T_P^* M$. Njegovi elementi su *kotangentni vektori*, tj. linearni funkcionali $\omega : T_P M \to \mathbb{R}$. Baza vektorskog prostora $T_P^* M$ je skup $\{dx^\mu\}$, i svaki element prostora $T_P^* M$ možemo zapisati u obliku

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu.$$

2.2 Tenzori

Kao što je pokazano u [20], tenzor tipa (q, r) je multilinearan funkcional koji q elemenata prostora $T_P^* M$ i r elemenata prostora $T_P M$ pridružuje realan broj, tj.

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{q} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r} \to \mathbb{R}.$$

Skup tenzora tipa (q, r) u tački $P \in M$ označavamo sa $T^q_r(M)$ i pišemo

$$T^q_r(M) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r}$$

Tenzor tipa $(0, 0)$ je skalar, tenzor tipa $(0, 1)$ je kovarijantni tenzor a tenzor tipa $(1, 0)$ je kontravarijantni tenzor. Koristeći Einsteinovu konvenciju o sabiranju, element $T \in T^q_r(M)$ možemo zapisati u obliku

$$T = T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_r}.$$

Tenzorski proizvod tenzora tipa (q_1, r_1) i tenzora tipa (q_2, r_2) je tenzor tipa $(q_1 + q_2, r_1 + r_2)$.

Vektorsko polje je glatko pridruživanje vektora svakoj tački mnogostrukosti M , tj. elementa prostora T_PM, $(P \in M)$. Drugim riječima, V je vektorsko polje ako je $V[f] \in \mathcal{F}(M)$ za svaku funkciju $f \in \mathcal{F}(M)$. Svaka komponenta vektorskog polja je glatka funkcija sa mnogostrukosti M u skup $\mathbb{R}$. Skup svih vektorskih polja mnogostrukosti M označavamo sa $\mathcal{X}(M)$.

Tenzorsko polje tipa (q, r) je glatko pridruživanje elementa prostora $T^q_r(M)$ svakoj tački mnogostrukosti M. Skup tenzorskih polja tipa (q, r) označavamo sa $\mathcal{T}^q_r(M)$. Skup $\mathcal{T}^0_1(M)$ je skup dualnih vektorskih polja, dok je $\mathcal{T}^0_0(M) = \mathcal{F}(M)$.

Za vektorska polja $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ i $f \in \mathcal{F}(M)$ definišemo operaciju *Lie zagrade* sa

$$[X, Y]f = X[Y[f]] - Y[X[f]] \tag{2.2}$$

koja je također vektorsko polje i za koju vrijede sljedeće osobine:

$$[X, Y] \in \mathcal{X}(M), \quad [X, Y] = -[Y, X],$$

$$[fX, Y] = f[X, Y] - [Y[f]]X, \quad [X + Y, Z] = [X, Z] + [X, Z]$$

kao i identitet Jacobija

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0. \tag{2.3}$$

Vektorski prostor $\mathcal{X}(M)$ je algebra u odnosu na operaciju zagrada. Izraz $[X, Y]$ također možemo pisati u obliku $\mathcal{L}_XY$ i nazivamo ga *Lie izvod* vektorskog polja Y duž vektorskog polja X.

Definicija 2.2.1 *Diferencijalna forma reda r (ili $r-$forma) je totalno antisimetričan tenzor tipa $(0, r)$.*

Specijalno, $0-$forme su skalari, a $1-$forme možemo zapisati u obliku $\omega = \omega_\mu dx^\mu$. Vektorski prostor svih $r-$formi na mnogostrukosti M označavamo sa $\Lambda^r(M)$.
Vanjski proizvod[1] r jedan formi definišemo sa

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_\pi \mathrm{sgn}(\pi) dx^{\mu_{\pi(1)}} \otimes dx^{\mu_{\pi(2)}} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_{\pi(r)}} \quad (2.4)$$

sa osobinama

(i) $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} = 0$ ako su bilo koja dva indeksa jednaka,

(ii) $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} = \mathrm{sgn}(\pi) dx^{\mu_{\pi(1)}} \wedge dx^{\mu_{\pi(2)}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{\pi(r)}}$.

(iii) $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$ je linearan po svakom dx^{μ_i}.

Pomoću vanjskog proizvoda $r-$forme možemo zapisati u obliku

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} \quad (2.5)$$

pri čemu su komponente $\omega_{\mu_1 \ldots \mu_r}$ totalno antisimetrične pri zamjeni indeksa. Za bazu vektorskog prostora $\Lambda^r(M)$ možemo uzeti $\{dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}\}$ pa je $\dim(\Lambda^r(M)) = \binom{m}{r}$, pri čemu je m dimenzija mnogostrukosti M. Jasno, vrijedi $\Lambda^1(M) = T_P^*(M)$. Budući da vrijedi jednakost $\binom{m}{r} = \binom{m}{m-r}$, tada je $\dim(\Lambda^r(M)) = \dim(\Lambda^{m-r}(M))$ pa su prostori $\Lambda^r(M)$ i $\Lambda^{m-r}(M)$ izomorfni, što je pokazano u [15]. Diferencijalne forme zadovoljavaju jednakosti

(i) $\alpha \wedge \alpha = 0$,

(ii) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha, \ \ \alpha \in \Lambda^p(M), \beta \in \Lambda^q(M)$.

Vanjski izvod[2] je preslikavanje $d : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$ definisano sa

$$d\omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} \quad (2.6)$$

Operator vanjskog izvoda na diferencijalne forme djeluje prema pravilu

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (d\beta), \quad (\alpha \in \Lambda^r(M), \beta \in \Lambda^q(M)).$$

[1]eng. “wedge product”
[2]eng. “exterior derivative”

Neka je M $m-$dimenzionalna mnogostrukost. *Hodgeova zvjezdica* $*$ je linearno preslikavanje $* : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{m-r}(M)$ čija je akcija na bazne vektore prostora $\Lambda^r(M)$ definisana sa

$$*(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{|\det g|}}{(m-r)!} \varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_r}{}_{\nu_{r+1} \ldots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_m}$$

Ukoliko je $\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} \in \Lambda^r(M)$, tada je

$$*\omega = \frac{\sqrt{|\det g|}}{r!(m-r)!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} \varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_r}{}_{\nu_{r+1} \ldots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_m} \tag{2.7}$$

pri čemu je

$$\varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \begin{cases} 1; & \text{ako je } (\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n) \text{ parna permutacija} \\ & \text{elemenata } (1, 2, \ldots, n) \\ -1; & \text{ako je } (\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n) \text{ neparna permutacija} \\ & \text{elemenata } (1, 2, \ldots, n) \\ 0; & \text{inace.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Neka su

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r},$$
$$\xi = \frac{1}{r!} \xi_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r},$$

dvije $r-$forme. Tada je, kao što je pokazano u [15], $\omega \wedge (*\xi)$ $m-$forma i vrijedi

$$\omega \wedge (*\xi) = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} \xi^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

Skalarni proizvod $r-$formi definišemo sa

$$(\omega, \xi) = \int \omega \wedge (*\xi) = \frac{1}{r!} \int_M \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} \xi^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} \sqrt{|\det g|} dx^1 dx^2 \cdots dx^m. \tag{2.9}$$

2.3 Lie grupe i Lie algebre

Definicija 2.3.1 *Lie grupa G je diferencijabilna mnogostrukost koja ima strukturu grupe a preslikavanja množenja i inversa*

(i) $\psi : G \times G \to G$ *definisano sa* $\psi(a, b) = a \cdot b$,

(ii) $\tau : G \to G$ *definisan sa* $\tau(a) = a^{-1}$.

su diferencijabilna.

Jedinični element Lie grupe označavamo sa e. Dimenzija Lie grupe G je definisana dimenzijom G kao mnogostrukosti.
Veliku primjenu u fizici ima grupa regularnih matrica reda n čiji su elementi realni (kompeksni) brojevi a koju označavamo sa $GL(n, \mathbb{R})$ ($GL(n, \mathbb{C})$) i koju nazivamo *generalna linearna grupa.* Operacija množenja ove Lie grupe je obično množenje matrica, a inversa je predstavljen nalaženjem inverzne matrice. Posebno interesantne podgrupe grupe $GL(n, \mathbb{R})$ su

- Ortogonalna grupa

$$O(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^T = A^T A = I_n\}, \tag{2.10}$$

- Specijalna linearna grupa

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}, \tag{2.11}$$

- Specijalna ortogonalna grupa

$$SO(n) := O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}). \tag{2.12}$$

U specijalnoj relativnosti posebno je interesantna Lorentzova grupa

$$O(1,3) := \{A \in GL(4, \mathbb{R}) : M\eta M^T = \eta\} \tag{2.13}$$

pri čemu je $\eta = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$ metrika Minkowskog, kao i njena po–dgrupa[3]

$$O_+^\uparrow(1,3) := \{A \in O(1,3) : \det A = 1 \wedge A_{00} > 0\}. \tag{2.14}$$

Podgrupe grupe $GL(n, \mathbb{C})$ su

- Unitarna grupa[4]

$$U(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^\dagger = A^\dagger A = I_n\}, \tag{2.15}$$

- Specijalna linearna grupa

$$SL(n, \mathbb{C}) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \det A = 1\}, \tag{2.16}$$

[3] Numeracija vrsta i kolona matrice počinje od 0.
[4] $A^\dagger$ označava Hermitski konjugovanu matricu matrice A.

- Specijalna unitarna grupa

$$SU(n) := U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}). \tag{2.17}$$

Sljedeći teorem garantuje da su sve navedene podgrupe također Lie grupe:

Teorem 2.3.1 *Svaka zatvorena podgrupa G_1 Lie grupe G je Lie podgrupa.*

Dokaz ove teoreme se može naći u [15].

Definicija 2.3.2 *Neka su a i g elementi Lie grupe G. Desna translacija $R_a : G \to G$ i lijeva translacija $L_a : G \to G$ elementa g sa a su definisani sa*

$$R_a g = ga, \quad L_a g = ag.$$

Preslikavanja R_a i L_a su difeomorfizmi. Stoga, ova preslikavanja induciraju preslikavanja $L_{a*} : T_g G \to T_{ag} G$ i $R_{a*} : T_g G \to T_{ga} G$. Ako je $X \in \mathcal{X}(M)$ vektorsko polje na Lie grupi G i ako je $L_{a*} X|_g = X|_g$, tada za X kažemo da je *lijevo invarijantno vektorsko polje.*

Definicija 2.3.3 *Skup svih lijevo invarijantnih vektorskih polja $\mathfrak{g}$ sa Lie zagradama $[\quad , \quad] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ naziva se Lie algebra Lie grupe G.*

Lie algebre neke Lie grupe označavamo sa odgovarajućim malim slovima njemačkog gotik pisma. Na primjer, Lie algebru grupe $GL(n, \mathbb{R})$ označavamo sa $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Definicija 2.3.4 *Neka je G Lie grupa i neka je M mnogostrukost. Akcija G na M je diferencijabilno preslikavanje $\xi : G \times M \to M$ koje zadovoljava uvjete*

(i) $\xi(e, P) = P \qquad (P \in M)$,

(ii) $\xi(g_1, \xi(g_2, P)) = \xi(g_1 g_2, P) \qquad g_1, g_2 \in G.$

Primjer 2.3.1 *Neka je $A \in GL(n, \mathbb{R})$ i neka je $x \in \mathbb{R}^n$. Akcija grupe $GL(n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$ je definisana sa običnim djelovanjem matrice na vektor:*

$$\xi(A, x) = A \cdot x.$$

Primjer 2.3.2 *Neka je $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Akcija grupe $SL(2, \mathbb{C})$ na mnogostrukost M_4 je definisana sa*

$$\xi(A, x) = A \cdot X(x) \cdot A^\dagger$$

Za vektor $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in M_4$ definišemo Hermitovu matricu

$$X(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.$$

Akcija grupe $SL(2, \mathbb{C})$ na mnogostrukost M_4 predstavlja Lorentzovu transformaciju $O(1, 3)$.

2.4 Riemannove i ne Riemannove mnogostrukosti

Mnogostrukost je topološki prostor koji je lokalno Euklidski prostor. Račun na mnogostrukostima je omogućen jer svakoj tački mnogostrukosti M možemo pridružiti koordinatni sistem. Ukoliko mnogostrukost obogatimo i uvođenjem metričkog tenzora, račun uveliko postaje zanimljiviji, jer je metrički tenzor generalizacija skalarnog proizvoda između dva vektora Euklidskog prostora. Pomoću metričkog tenzora definišemo skalarni proizvod uzmeđu dva vektora tangentnog prostora $T_P M$. Također, pomoću *konekcije* možemo porediti vektor u tački $P \in M$ sa nekim drugim vektorom u tački $P' \in M$.

Definicija 2.4.1 *Neka je M diferencijabilna mnogostrukost. Riemannova metrika g na mnogostrukosti M je tenzorsko polje tipa $(0,2)$ na M koje u svakoj tački $P \in M$ zadovoljava sljedeće uslove:*

(i) $g_P(U,V) = g_P(V,U)$,

(ii) $g_P(U,U) \geqslant 0$ *pri čemu jednakost vrijedi ako je* $U = 0$,

za svako $U, V \in T_P M$ *i* $g_P = g|_P$.

Ukratko, g_P je simetrična pozitivno definitna bilinearna forma. Tenzorsko polje g tipa $(0,2)$ naziva se *ne Riemannova metrika* ako zadovoljava uslov (i) i uslov

(iii) ako je $g_P(U,V) = 0$ za svako $U \in T_P M$, onda je $V = 0$.

Neka je (U, φ) karta mnogostrukosti M i $\{x^\mu\}$ lokalne koordinate. Kao što je pokazano u [15], g je tenzorsko polje tipa $(0,2)$ pa može biti zapisano u obliku

$$g_P = g_{\mu\nu}(P) dx^\mu \otimes dx^\nu \tag{2.18}$$

pri čemu je

$$g_{\mu\nu}(P) = g_P\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = g_P\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = g_{\nu\mu}(P).$$

Ukoliko nije drugačije naglašeno, u zapisu $g_{\mu\nu}(P)$ izostavljaćemo tačku P. Elementi $g_{\mu\nu}$ sačinjavaju regularnu simetričnu matricu, pa tada postoji inverzna matrica $(g^{\mu\nu})$. Determinantnu matrice $(g_{\mu\nu})$ označavamo sa g. Veličinu $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ nazivamo metrikom iako je u krajnjem slučaju metrika tenzor $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$.

Standardni je dogovor da pomoću metričkog tenzora vršimo podizanje i spuštanje indeksa tenzora, tj.

$$g_{\mu\nu}v^{\nu} = v_{\mu} \qquad g^{\mu\nu}v_{\nu} = v^{\mu}.$$

Budući da je $(g^{\mu\nu})$ simetrična matrica, sve svojstvene vrijednosti su realne. Ako je g Riemannova metrika, tada su sve svojstvene vrijednosti pozitivne, a ako je metrika g ne Riemannova, tada neke mogu biti i negativne. Ukoliko postoji i pozitivnih i j negativnih svojstvenih vrijednosti, uređeni par (i, j) se naziva *indeks metrike*. Ako je $j = 1$, za metriku kažemo da je *Lorentzova metrika*. Ukoliko metriku dijagonaliziramo odgovarajućom ortogonalnom matricom, lahko je sve elemente na glavnoj dijagonali dovesti na vrijednosti ± 1. Ukoliko krenemo od Riemannove metrike, dobićemo *Euklidsku metriku* $\delta = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1)$, a ukoliko krenemo od Lorentzove metrike, dobićemo *metriku Minkowskog* $\eta = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Ako je (M, g) Lorentzijan, elementi prostora $T_P M$ su podijeljeni u tri grupe

(i) ukoliko je $g(U, U) > 0$, za vektor U kažemo da je *prostorni*[5],

(ii) ukoliko je $g(U, U) = 0$, za vektor U kažemo da je *svjetlosni* [6] ili *nula vektor*,

(iii) ukoliko je $g(U, U) < 0$, za vektor U kažemo da je *vremenski.* [7]

Ukoliko je na glatkoj mnogostrukosti M definisana Riemannova metrika g, uređeni par (M, g) se naziva *Riemannova mnogostrukost*. Ako je g ne Riemannova metrika, uređeni par (M, g) se naziva *ne Riemannova mnogostrukost*, ako je g Lorentzova metrika, uređeni par (M, g) se naziva *Lorentzova mnogostrukost*. Lorentzove mnogostrukosti su od posebnog značaja u teoriji relativnosti. Na primjer, četverodimenzionalni prostor Minkowskog $(\mathbb{R}^4, \eta)$ je Lorentzova mnogostrukost.

2.5 Afine konekcije. Metrička konekcija

Definicija 2.5.1 *Afina konekcija ∇ je preslikavanje $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ koje zadovoljava sljedeće osobine*

$$\begin{aligned}
\nabla_X(Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z \\
\nabla_{(X+Y)} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\
\nabla_{fX} Y &= f \nabla_X Y \\
\nabla_X(fY) &= X[f]Y + f \nabla_X Y
\end{aligned}$$

[5] eng. “spacelike”

[6] eng. “lightlike”

[7] eng. “timelike”

pri čemu su $f \in \mathcal{F}(M)$ i $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Neka je M $m-$dimenzionalna mnogostrukost i neka je (U, φ) karta od M sa koordinatama $\{x^\mu\}$. Definišimo m^3 funkcija $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, koje nazivamo *koeficijenti konekcije* sa

$$\nabla_{e_\nu} e_\mu \equiv \nabla_\nu e_\mu = e_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \tag{2.19}$$

pri čemu je $\{e_\mu\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$ koordinatna baza prostora $T_P M$. *Koeficijenti konekcije određuju kako se od tačke do tačke mijenjaju vektori baze.*
Kovarijantni izvod vektorskog polja definišemo sa

$$\nabla_\mu v^\lambda = \partial_\mu v^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} v^\nu \tag{2.20}$$

Ukoliko je na mnogostrukosti M zadana kriva $c : (a, b) \to M$, tada možemo definisati paralelni transport vektora duž te krive. Ukoliko vektorsko polje X zadovoljava uslov

$$\nabla_V X = 0, \quad t \in (a, b), \tag{2.21}$$

tada za vektorsko polje X kažemo da je paralelno transportovano duž krive c, pri čemu je V tangentni vektor na krivu $c(t)$, $(t \in (a, b))$. Ukoliko vrijedi uslov

$$\nabla_V V = 0, \quad t \in (a, b) \tag{2.22}$$

tada krivu $c(t)$ nazivamo *geodezija*. Geodezije su "najpravije" krive na Riemannovoj mnogostrukosti. U smislu dužine, geodezije su najkraće linije koje spajaju dvije tačke na mnogostrukosti. Jednačinu (2.22) možemo zapisati u obliku

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0 \tag{2.23}$$

pri čemu su $\{x^\mu\}$ lokalne koordinate krive $c(t)$.
Neka je g metrički tenzor. Tada je

$$\nabla_\nu g_{\lambda\mu} = \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu} g_{\lambda\kappa}.$$

Ukoliko je $\nabla g = 0$, tada za afinu konekciju ∇ kažemo da je *metrički kompatibilna* ili *metrička konekcija.*
Christoffelove simbole druge vrste definišemo sa

$$\begin{Bmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \tag{2.24}$$

2.6 Krivina i torzija

Kao što je pokazano u [15],*tenzor torzije* $T : \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ i *Riemannov tenzor krivine* $R : \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ definišemo sa

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.25}$$

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.26}$$

za koje vrijedi

$$T(X,Y) = -T(Y,X), \quad R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$$

Uobičajeno je pisati $R(X,Y)Z$ umjesto $R(X,Y,Z)$ da bi izgledalo da je R operator koji djeluje na Z. Budući da operator T slika dva vektorska polja u jedno vektorsko polje, tada je T tenzorsko polje tipa $(1,2)$. Analogno, budući da operator R slika tri vektorska polja u jedno vekorsko polje, tada je R tenzorsko polje tipa $(1,3)$.
Komponente tenzora torzije možemo napisati u obliku

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} \tag{2.27}$$

Tenzor $T^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ je antisimetričan tenzor po drugom i trećem indeksu, tj. vrijedi

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -T^{\lambda}{}_{\nu\mu} \tag{2.28}$$

Kontorziju definišemo sa

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}\right) \tag{2.29}$$

koji je antisimetričan po prvom i trećem indeksu, tj. $K_{\lambda\mu\nu} = -K_{\nu\mu\lambda}$. Veza između torzije i kontorzije data je sa

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = K^{\lambda}{}_{\mu\nu} - K^{\lambda}{}_{\nu\mu}.$$

Koeficijente konekcije možemo napisati kao

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^{\lambda}{}_{\mu\nu} \tag{2.30}$$

Ukoliko je na mnogostrukosti M torzija jednaka nuli, tada afinu konekciju ∇ nazivamo *simetrična konekcija*. Metrički kompatibilna i simetrična konekcija naziva se Levi-Civita konekcija. Dakle, Levi-Civita konekcija je pravilo para–lelnog pomjeranja po kome je norma vektora invarijantna pod paralelnim pomjeranjem, a za koeficijente konekcije vrijedi simetrija $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$.

Teorem 2.6.1 (Fundamentalni teorem (ne) Riemannove geometrije) *Na (ne) Riemannovoj mnogostrukosti (M, g) postoji jedinstvena simetrična konekcija koja je kompatibilna sa metrikom g. Tu konekciju nazivamo Levi-Civita konekcija.*

Dokaz teoreme se može naći u [15].
Komponente Riemannovog tenzora krivine možemo napisati u obliku

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} := \partial_\mu \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda} \tag{2.31}$$

Riemannov tenzor krivine je antisimetričan tenzor po trećem i četvrtom inde–ksu, tj. vrijedi $R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = -R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$. Ukoliko je konekcija Levi-Civita, Riemannov tenzor krivine je zadan sa

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} := \partial_\mu \begin{Bmatrix} \kappa \\ \nu\lambda \end{Bmatrix} - \partial_\nu \begin{Bmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \kappa \\ \mu\eta \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta \\ \nu\lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \kappa \\ \nu\eta \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta \\ \mu\lambda \end{Bmatrix} \tag{2.32}$$

pri čemu je $\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix}$ definisano sa (2.24).
Riemannov tenzor krivine zadovoljava dvije bitne jednakosti:

(i) prvi Bianchijev identitet

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} + R^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda} + R^{\kappa}{}_{\nu\lambda\mu} = 0;$$

(ii) drugi Bianchijev identitet

$$\nabla_\kappa R^{\xi}{}_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\mu R^{\xi}{}_{\lambda\nu\kappa} + \nabla_\nu R^{\xi}{}_{\lambda\kappa\mu} = 0.$$

Drugi Bianchijev identitet često pišemo i u formi

$$(\partial_\kappa + [\Gamma_\kappa, \cdot])R_{\mu\nu} + (\partial_\nu + [\Gamma_\nu, \cdot])R_{\kappa\mu} + (\partial_\mu + [\Gamma_\mu, \cdot])R_{\nu\kappa} = 0 \tag{2.33}$$

pri čemu smo sakrili dva indeksa koristeći matričnu notaciju

$$[\Gamma_\xi, R_{\mu\nu}]^{\kappa}{}_{\lambda} = \Gamma^{\kappa}{}_{\xi\eta} R^{\eta}{}_{\lambda\mu\nu} - R^{\kappa}{}_{\eta\mu\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\xi\lambda}. \tag{2.34}$$

Kontrakcijom prvog i trećeg indeksa Riemannovog tenzora krivine dobijamo *Ricci krivinu*

$$Ric_{\mu\nu} := R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu} \tag{2.35}$$

Skalarnu krivinu definišemo sa

$$\mathcal{R} := Ric^{\kappa}{}_{\kappa} \tag{2.36}$$

i *bez traga Ricci krivinu* sa

$$\mathcal{R}ic := Ric - \frac{1}{4}\mathcal{R}g \tag{2.37}$$

Weylovu krivinu $\mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu\nu}$ definišemo kao dio Riemannovog tenzora krivine koji zadovoljava uslove

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= R_{\mu\nu\kappa\lambda}, && (2.38)\\ \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= 0, && (2.39)\\ Ric &= 0. && (2.40) \end{aligned}$$

Kada Hodgeova zvjezdica djeluje na Riemannov tenzor krivine, moramo izabrati da li djeluje na prvi ili drugi par indeksa. Tako imamo dvije različite Hodgeove zvjezdice, lijevu i desnu, koje su definisane sa

$$({}^*R)_{\kappa\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2}\sqrt{|\det g|}R^{\kappa'\lambda'}{}_{\mu\nu}\varepsilon_{\kappa'\lambda'\kappa\lambda} \tag{2.41}$$

$$(R^*)_{\kappa\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2}\sqrt{|\det g|}R_{\kappa\lambda}{}^{\mu'\nu'}\varepsilon_{\mu'\nu'\mu\nu}. \tag{2.42}$$

2.7 Paulijeve matrice u prostoru Minkowskog

U ovom dijelu predstavljamo standardni izbor Paulijevih matrica u prostoru Minkowskog, kojeg posmatramo kao četverodimenzionalnu mnogostrukost $M = \mathbb{R}^4$ opskrbljenu sa globalnim koordinatama (x^0, x^1, x^2, x^3) i metrikom Minkowskog $\eta = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$. U ovim postavkama, Paulijeve matrice $\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}$ su date sa

$$\begin{aligned} \sigma^0{}_{a\dot{b}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1{}_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^2{}_{a\dot{b}} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3{}_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kao što je pokazano u [16], eksplicitne formule za "Paulijeve matrice drugog reda" su

$$\begin{aligned} \sigma^{01}{}_{ab} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \sigma^{02}{}_{ab} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \ \sigma^{03}{}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^{12}{}_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^{13}{}_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \sigma^{23}{}_{ab} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Uočimo da su Paulijeve matrice drugog reda antisimetrične po tenzorskim indeksima, tj. $\sigma^{\mu\nu}{}_{ab} = -\sigma^{\nu\mu}{}_{ab}$.

Poglavlje 3

PP-talasi sa torzijom

U ovoj glavi upoznaćemo se sa *pp-talasima*, predstavljajući klasične pp-talase i njihova matematička i fizička svojstva, koje ćemo poslije generalizovati dodavajući im torziju. Izlaganje gradiva u ovoj glavi uglavnom prati [16].

3.1 Klasični pp-talasi

Postoji nekoliko objašnjena za to šta označava skraćenica "pp". Prema Griffithsu [6], "pp" je skraćenica za "plane–fronted gravitational waves with parallel rays" što u prevodu znači *ravni gravitacioni talasi sa paralelnim zracima*, dok je objašnjenje Peresa [19] da je "pp" skraćenica za "plane polarized gravitational waves", što u prevodu znači *ravni polarizovani gravitacioni talasi*, na osnovu izlaganja u [16], pokazalo netačnim.
Klasični pp-talasi su veoma poznati u generalnoj relativnosti. Otkrio ih je Brinkmann [1] 1923. godine, a kasnije su potvrđeni od strane Peresa i drugih autora.
Budući da klasični pp-talasi nemaju torziju, pretpostavlja se da je prostorvrijeme Riemannovo (vidjeti Definiciju 1.4.1), tj. da je konekcija Levi-Civita.

Definicija 3.1.1 *PP-talas je Riemannovo prostorvrijeme koje prima nenestajuće paralelno polje spinora.*

Nenestajuće paralelno polje spinora označavaćemo sa $\chi = \chi^a$ i za njega ćemo pretpostaviti da je fiksno. Neka je

$$l^\alpha := \sigma^\alpha{}_{a\dot{b}}\chi^a\overline{\chi}^{\dot{b}} \tag{3.1}$$

pri čemu su σ^α Paulijeve matrice. Definišimo skalarnu funkciju $\varphi : M \to \mathbb{R}$ sa

$$\varphi(x) := \int l \cdot dx. \tag{3.2}$$

Ovu funkciju nazivamo *faza*.

Definicija 3.1.2 *Za kompleksno vektorsko polje u kažemo da je transferzalno ako je $l_\alpha u^\alpha = 0$.*

Definicija 3.1.3 *Za kompleksno vektorsko polje v kažemo da je ravni talas ako je $u^\alpha \nabla_\alpha v^\beta = 0$ za proizvoljno transferzalno vektorsko polje u.*

Definicija 3.1.4 *PP-talas je Riemannovo prostorvrijeme čija metrika može biti lokalno zapisana u obliku*

$$ds^2 = 2dx^0 dx^3 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + f(x_1, x_2, x_3)(dx^3)^2 \tag{3.3}$$

u nekim lokalnim koordinatama (x^0, x^1, x^2, x^3).

Metriku pp-talasa kraće ćemo zvati *pp-metrika.* Ova definicija je prvo korištena od strane Peresa kada je predstavio pp-talase u [19]. Formula za krivinu pp-talasa je veoma jednostavna i za pp-metriku (3.3), tenzor krivine R je linearan po f i ima oblik

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{2}(l \wedge \partial)_{\kappa\lambda}(l \wedge \partial)_{\mu\nu} f \tag{3.4}$$

pri čemu je $(l \wedge \partial)_{\alpha\beta} = l_\alpha \partial_\beta - \partial_\beta l_\alpha$. Prednost ove definicije pp-talasa je u tome što je data eksplicitna formula za metriku, a nedostatak je što formula zavisi od izbora lokalnih koordinata. Izbor lokalnih koorinata u kome pp-metrika ima oblik (3.3) nije jedinstven. Zato se ograničavamo na izbor koordinata za koje je

$$\chi^a = (1, 0), \quad l^m = (1, 0, 0, 0), \quad m^\mu = (0, 1, \mp i, 0). \tag{3.5}$$

Sa takvim izborom koordinata, faza (3.2) je $\varphi(x) = x^3 + konstanta$ i funkcija f zadovoljava jednačine

$$l^\mu \partial_\mu f = 0, \quad m^\mu \partial_\mu f = 2p \tag{3.6}$$

pri čemu je funkcija $p : M \to \mathbb{C}$ definisana sa

$$\nabla_\alpha m_\beta = p l_\alpha l_\beta.$$

Pomoću ovih jednačina funkciju f možemo interpretirati kao *potencijal* pp-talasa. Jednačine (3.6) određuju gradijent funkcije f duž talasnog fronta i definišu funkciju f jedinstveno do dodatka proizvoljne realne skalarne funkcije φ. Formulu (3.4) možemo zapisati u obliku

$$R = -\frac{1}{2}(l \wedge \nabla) \otimes (l \wedge \nabla) f \tag{3.7}$$

pri čemu je $l \wedge \nabla = l \otimes \nabla - \nabla \otimes l$. U specijalnim lokalnim koorinatama (3.3) i (3.5), formula (3.7) postaje (3.4). Prednost formule (3.7) je što su i lijeva i desna strana tenzori, pa vrijedi u bilo kojem koordinatnom sistemu.
Krivina pp-talasa ima dva ireducibilna dijela: bez traga Ricci krivinu i Weylovu krivinu. Tenzor krivine možemo predstaviti kao

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\kappa\mu} Ric_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu} Ric_{\kappa\nu} + g_{\lambda\nu} Ric_{\kappa\mu} - g_{\kappa\nu} Ric_{\lambda\mu}\right) + \mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu\nu} \tag{3.8}$$

pri čemu $\mathcal{W}$ označava Weylovu krivinu. Ricci krivina je proporcionalna sa $l \otimes l$, dok je Weylova krivina linearna kombincija $\mathrm{Re}((l \wedge m) \otimes (l \wedge m))$ i $\mathrm{Im}((l \wedge m) \otimes (l \wedge m))$. U specijalnim lokalnim koordinatama (3.3) i (3.5), vrijedi

$$\begin{aligned} Ric_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(f_{11} + f_{22}) l_\mu l_\nu & (3.9) \\ \mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu\nu} &= \sum_{i,j=1}^{2} w_{ij} (l \wedge m_i) \otimes (l \wedge m_j) & (3.10) \end{aligned}$$

pri čemu su $m_1 = Re(m), m_2 = Im(m), f_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta f$ a w_{ij} su realni skalari definisani sa

$$w_{11} = \frac{1}{4}(-f_{11} + f_{22}), \quad w_{22} = -w_{11}$$

$$w_{12} = \pm\frac{1}{2} f_{12}, \quad w_{12} = w_{21}.$$

3.2 Generalizirani pp-talasi

Generalizirani pp-talasi su generalizacija klasičnih pp-talasa na metrički ko–mpatiblno prostorvrijeme, tj. prostorvrijeme čija konekcija ne mora biti Levi-Civita.
U klasičnom pp-prostoru posmatrajmo polarizovanu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm i dA \tag{3.11}$$

pri čemu je A nepoznato kompleksno vektorsko polje. Rješenja jednačine (3.11) tražimo u obliku ravnih talasa. Pokazuje se da ih eksplicitno možemo zapisati u obliku

$$A = h(\varphi) m + k(\varphi) l \tag{3.12}$$

pri čemu su $l^\mu = (1,0,0,0)$ i $m^\mu = (0,1,\mp i,0)$ vektorska polja, a $h,k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ proizvoljne funkcije i φ faza definisana sa (3.2).

Definicija 3.2.1 *Generalizirani pp-talas je metrički kompatibilno prostorvrijeme sa pp-metrikom i torzijom*

$$T := \frac{1}{2}\mathrm{Re}(A \otimes dA) \tag{3.13}$$

pri čemu je A vektorsko polje (3.12).

Kao što je pokazano u [17], krivina generaliziranog pp-talasa je data sa

$$R = -\frac{1}{2}(l \wedge \{\nabla\}) \otimes (l \wedge \{\nabla\}) f + \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left((h^2)''(l \wedge m) \otimes (l \wedge m)\right), \tag{3.14}$$

a torzija sa

$$T = \mathrm{Re}\left((al + bm) \otimes (l \wedge m)\right), \tag{3.15}$$

pri čemu su

$$a := \frac{1}{2}h'(\varphi)k(\varphi), \quad b := \frac{1}{2}h'(\varphi)h(\varphi). \tag{3.16}$$

U specijalnim lokalnim koordinatama (3.3) i (3.5), krivina je

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{2}(l \wedge \partial)_{\kappa\lambda}(l \wedge \partial)_{\mu\nu} f + \frac{1}{4}Re\left((h^2)''(l \wedge m)_{\kappa\lambda}(l \wedge m)_{\mu\nu}\right), \tag{3.17}$$

a torzija je

$$T^\kappa{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left((k(\varphi)h'(\varphi)l^\kappa + h(\varphi)h'(\varphi)m^\kappa)(l \wedge m)_{\lambda\mu}\right). \tag{3.18}$$

Torzija generaliziranog pp-talasa može biti zapisana i u obliku

$$T = \sum_{i,j=1}^{2} t_{ij} m_i \otimes (l \wedge m_j) + \sum_{i=1}^{2} t_i l \otimes (l \wedge m_i) \tag{3.19}$$

pri čemu su

$$t_{11} = -t_{22} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(b), \quad t_{12} = t_{21} = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(b), \quad t_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(a), \quad t_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(a)$$

$$m_1 = \mathrm{Re}(m), \quad m_2 = \mathrm{Im}(m)$$

a a i b su definisani sa (3.16). Odavdje vidimo da torzija ima četiri nezavisne komponente različite od nule.

Lema 3.2.1 *Torzija generaliziranog pp-talasa je čisto tenzorska*[1], *tj.*

$$T^{\kappa}{}_{\kappa\mu} = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} T^{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

U lokalnim koordinatama (3.3), (3.5) Ricci krivina i Weylova krivina gene–raliziranih pp-talasa može biti napisana u obliku

$$Ric_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(f_{11} + f_{22}) l_\mu l_\nu, \tag{3.20}$$

$$\mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \sum_{i,j=1}^{2} w_{ij} (l \wedge m_i) \otimes (l \wedge m_j), \tag{3.21}$$

pri čemu su $m_1 = \mathrm{Re}(m), m_2 = \mathrm{Im}(m), f_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta f$ a w_{ij} su skalari definisani sa

$$w_{11} = \frac{1}{4}(-f_{11} + f_{22} + \mathrm{Re}((h^2)'')), \quad w_{22} = -w_{11}$$

$$w_{12} = \pm\frac{1}{2} f_{12} - \frac{1}{4}\mathrm{Im}((h^2)'')), \quad w_{12} = w_{21}.$$

Prema [17], vrijedi sljedeći teorem

Teorem 3.2.1 *Generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom su rješenja jednačina (1.5), (1.6).*

Pokazuje se da je, u specijalnim lokalnim koordinatama, Ricci krivina gene–raliziranih pp-talasa jednaka nuli akko je $f_{11}+f_{22} = 0$ a paralelna, tj. $\nabla Ric = 0$ akko je $f_{11} + f_{22} = const$. Weylova krivina je jednaka nuli akko je

$$f_{11} - f_{22} = \mathrm{Re}\left((h^2)''\right), \quad f_{12} = \pm\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left((h^2)''\right).$$

Krivina generaliziranih pp-talasa je jednaka nuli akko su istovremeno i Ricci krivina i Weylova krivina jednaki nuli. Za datu funkciju h možemo odabrati funkciju f takvu da je $R = 0$. Funkcija f je kvadratni polinom po x^1 i x^2 sa koeficijentima koji ovise o x^3. Time dobijamo posebnu klasu prostora, tzv. Weitzenböckovih prostora, kod koji je $R = 0$ i $T \neq 0$.

[1]Vidjeti Dodatak A.

Poglavlje 4

Novi eksplicitni prikaz jednačina polja

4.1 Glavni rezultat

U ovoj glavi napisaćemo eksplicitno jednačine polja (1.5), (1.6) koristeći sljedeće pretpostavke

(i) prostorvrijeme je metrički kompatibilno,

(ii) tenzor krivine ima osobine

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}, \qquad \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0,$$

(iii) skalarna krivina je nula.

Napomena: Za krivinu vrijedi antisimetrija $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$, a zbog metričke kompatibilnosti vrijedi i osobina $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$.

Glavni rezultat ove glave je

Lema 4.1.1 *Pod pretpostavkama* $(i)-(iii)$, *jednačine polja (1.5), (1.6) se mogu napisati u obliku*

$$d_1 \mathcal{W}^{\kappa\lambda\mu\nu} Ric_{\kappa\mu} + d_3 \left(Ric^{\lambda\kappa} Ric_{\kappa}{}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\lambda\nu} Ric_{\kappa\mu} Ric^{\kappa\mu} \right) = 0 \tag{4.1}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= d_6\nabla_\lambda Ric_{\kappa\mu} - d_7\nabla_\kappa Ric_{\lambda\mu}\\
&+ d_6\Big(Ric_\kappa{}^\eta(K_{\mu\eta\lambda}-K_{\mu\lambda\eta}) + \frac{1}{2}g_{\lambda\mu}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\kappa\xi}(K^\xi{}_{\eta\zeta}-K^\xi{}_{\zeta\eta}) + \frac{1}{2}g_{\mu\lambda}Ric_\xi{}^\eta K^\xi{}_{\eta\kappa}\\
&\qquad + g_{\mu\lambda}Ric_\kappa{}^\eta K^\xi{}_{\xi\eta} - K^\xi{}_{\xi\lambda}Ric_{\kappa\mu} + \frac{1}{2}g_{\mu\lambda}Ric_\kappa{}^\xi(K^\eta{}_{\xi\eta}-K^\eta{}_{\eta\xi})\Big)\\
&- d_7\Big(Ric_\lambda{}^\eta(K_{\mu\eta\kappa}-K_{\mu\kappa\eta}) + \frac{1}{2}g_{\kappa\mu}\mathcal{W}^{\kappa\zeta}{}_{\lambda\xi}(K^\xi{}_{\eta\zeta}-K^\xi{}_{\zeta\eta}) + \frac{1}{2}g_{\mu\kappa}Ric_\xi{}^\eta K^\xi{}_{\eta\lambda}\\
&\qquad + g_{\kappa\mu}Ric_\lambda{}^\eta K^\xi{}_{\xi\eta} - K^\xi{}_{\xi\kappa}Ric_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}g_{\mu\kappa}Ric_\lambda{}^\xi(K^\eta{}_{\xi\eta}-K^\eta{}_{\eta\xi})\Big)\\
&+ b_{10}\Big(g_{\mu\lambda}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\kappa\xi}(K^\xi{}_{\zeta\eta}-K^\xi{}_{\eta\zeta}) + g_{\mu\kappa}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\lambda\xi}(K^\xi{}_{\eta\zeta}-K^\xi{}_{\zeta\eta})\\
&\qquad + g_{\mu\lambda}Ric_\kappa{}^\xi(K^\eta{}_{\eta\xi}-K^\eta{}_{\xi\eta}) + g_{\mu\kappa}Ric_\lambda{}^\xi(K^\eta{}_{\xi\eta}-K^\eta{}_{\eta\xi})\\
&\qquad + g_{\kappa\mu}Ric_\lambda{}^\eta K^\xi{}_{\xi\eta} - g_{\lambda\mu}Ric_\kappa{}^\eta K^\xi{}_{\xi\eta} + Ric_{\mu\kappa}K^\eta{}_{\lambda\eta} - Ric_{\mu\lambda}K^\eta{}_{\kappa\eta}\Big)\\
&+ 2b_{10}\Big(\mathcal{W}^\eta{}_{\mu\kappa\xi}(K^\xi{}_{\eta\lambda}-K^\xi{}_{\lambda\eta}) + \mathcal{W}^\eta{}_{\mu\lambda\xi}(K^\xi{}_{\kappa\eta}-K^\xi{}_{\eta\kappa})\\
&\qquad - K_{\mu\xi\eta}\mathcal{W}^{\eta\xi}{}_{\kappa\lambda} - K^\xi{}_{\xi\eta}\mathcal{W}^\eta{}_{\mu\lambda\kappa}\Big)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

pri čemu su

$$
\begin{aligned}
d_1 &= b_{912} - b_{922} + b_{10}, \qquad d_3 = b_{911} - b_{922}\\
d_6 &= b_{912} - b_{911} + b_{10}, \qquad d_7 = b_{912} - b_{922} + b_{10}
\end{aligned}
$$

koeficijenti iz formule (B.6).

Lijeva strana jednačine (4.1) i desna strana jednačine (4.2) su, respektivno, komponetne tenzora A i B formule

$$
\delta S = \int (2A^{\lambda\nu}\delta g_{\lambda\nu} + 2B^{\kappa\mu}{}_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa})
$$

pri čemu su δg i $\delta\Gamma$ nezavisne varijacije po metrici, odnosno po konekciji a δS rezultat varijacije akcije. Jednačina (4.1) je jednačina (12) iz [24] uz uslov da je $\mathcal{R} = 0$. Pri dokazu ove leme koristimo se činjenicom da kvadratna forma, uz uslove $(i) - (iii)$ može biti napisana u obliku

$$
\begin{aligned}
q(R) &= \sum_{l,m=1}^{2} b_{9lm}(\mathcal{S}^{(l)}, \mathcal{S}^{(m)}) + b_{10}(R^{(10)}, R^{(10)})_{\mathrm{YM}} + \dots\\
&= \sum_{l,m=1}^{2} b_{9lm}(\mathcal{R}ic^{(l)}, \mathcal{R}ic^{(m)}) + b_{10}(R^{(10)}, R^{(10)})_{\mathrm{YM}} + \dots
\end{aligned}
$$

pri čemu $\cdots$ označavaju izraze koji ne utiču na δS kada računamo varijaciju uz uslove $(i)-(iii)$. Prema [24], uvedimo oznake

$$\begin{aligned} P_- &:= \frac{1}{2}(\mathcal{R}ic^{(1)} - \mathcal{R}ic^{(2)}), \\ P_+ &:= \frac{1}{2}(\mathcal{R}ic^{(1)} + \mathcal{R}ic^{(2)}) = \frac{1}{2}(Ric^{(1)} + Ric^{(2)}). \end{aligned}$$

U metrički kompatibilnom prostor vremenu vrijedi $\mathcal{R}ic^{(2)} = -\mathcal{R}ic^{(1)}$, odakle je $P_- = \mathcal{R}ic$ i $P_+ = 0$. Sa ovim oznakama, kvadratna forma (4.3) može biti napisana u obliku

$$\begin{aligned} q(R) &= b_{10}(R^{(10)}, R^{(10)})_{\mathrm{YM}} + (b_{911} - 2b_{912} + b_{922})(P_-, P_-) \\ &+ 2(b_{911} - b_{922})(P_-, P_+) + \dots . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Također, prema [23], kvadratna forma može biti napisana u obliku

$$q(R) = c_1(R^{(1)}, R^{(1)})_{\mathrm{YM}} + c_3(R^{(3)}, R^{(3)})_{\mathrm{YM}} + 2(b_{911} - b_{922})(P_-, P_+) + \dots \tag{4.4}$$

pri čemu je

$$c_1 = -\frac{1}{2}(b_{911} - 2b_{912} + b_{922}), \qquad c_3 = b_{10}, \tag{4.5}$$

a $R^{(j)}$ su ireducibilni dijelovi krivine[1] koji su prezentovani u [23]. U računu koji slijedi, koristićemo se zapisom kvadratne forme (4.4).

4.2 Varijacija po metrici

Zbog uslova $(i)-(iii)$, krivina ima samo dva ireducibilna dijela i to $R^{(1)}$ i $R^{(3)} = \mathcal{W}$, koji se eksplicitno mogu napisati u obliku

$$\begin{aligned} {R^{(1)}}_{\kappa\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(g_{\kappa\mu}Ric_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu}Ric_{\kappa\nu} - g_{\kappa\nu}Ric_{\lambda\mu} + g_{\lambda\nu}Ric_{\kappa\mu}\right) \\ {R^{(3)}}_{\kappa\lambda\mu\nu} &= R_{\kappa\lambda\mu\nu} - {R^{(1)}}_{\kappa\lambda\mu\nu}. \end{aligned}$$

Pri računanju ovih varijacija, koristićemo da je

$$\begin{aligned} \left(R^{(1)}, R^{(1)}\right)_{YM} &= -2(Ric_-, Ric_-) \\ \left(R^{(3)}, R^{(3)}\right)_{YM} &= (R, R)_{YM} - \left(R^{(1)}, R^{(1)}\right)_{YM} \end{aligned}$$

[1] Zapis ireducibilnih dijelova krivine se razlikuje ali je ekvivalentan onima koji su prezentovani u Dodatku B.

pri čemu je

$$\begin{aligned} Ric_- &= \frac{Ric^{(1)} - Ric^{(2)}}{2} = \frac{Ric - Ric^{(2)}}{2} \\ Ric_+ &= \frac{Ric^{(1)} + Ric^{(2)}}{2} = \frac{Ric + Ric^{(2)}}{2}. \end{aligned}$$

gdje je skalarni proizvod $(\cdot,\cdot)$ definisan sa (B.4). Tada je

$$\begin{aligned} \delta \int \left(R^{(1)}, R^{(1)}\right)_{YM} &= -2\delta \int (Ric_-, Ric_-) \\ &= -\frac{1}{2}\delta \int (Ric, Ric) - \frac{1}{2}\delta \int (Ric^{(2)}, Ric^{(2)}) \\ &+ \delta \int (Ric, Ric^{(2)}). \end{aligned}$$

Koristeći se računom iz Dodatka D, dobijamo da je

$$\begin{aligned} \delta \int \left(R^{(1)}, R^{(1)}\right)_{YM} &= -\frac{1}{2}\int (\delta g_{\alpha\beta}) \left(-2Ric^{\alpha}{}_{\nu} Ric^{\beta\nu} + \frac{1}{2} Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\right) \\ &- \frac{1}{2}\int (\delta g_{\alpha\beta}) \left(2Ric_{\kappa\nu} R^{\kappa\beta\alpha\nu} + \frac{1}{2} Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\right) \\ &+ \int (\delta g_{\alpha\beta}) \big(-R^{\kappa\alpha\beta\nu} Ric_{\kappa\nu} + Ric^{\kappa\alpha} Ric_{\kappa}{}^{\beta} \\ &\qquad -\frac{1}{2} Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\big) \\ &= -2\int (\delta g_{\alpha\beta}) \big(-Ric^{\alpha}{}_{\nu} Ric^{\beta\nu} + Ric_{\kappa\nu} R^{\kappa\beta\alpha\nu} \\ &\qquad + \frac{1}{2} Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\big). \end{aligned}$$

Budući da je

$$Ric_{\kappa\nu} R^{\kappa\beta\alpha\nu} = \mathcal{W}^{\kappa\beta\alpha\nu} Ric_{\kappa\nu} + Ric^{\alpha\nu} Ric^{\beta}{}_{\nu} - \frac{1}{2} Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} g^{\alpha\beta},$$

tada je

$$\delta \int \left(R^{(1)}, R^{(1)}\right)_{YM} = -2\int \mathcal{W}^{\kappa\beta\alpha\nu} Ric_{\kappa\nu} \delta g_{\alpha\beta}. \tag{4.6}$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \left(R^{(3)}, R^{(3)}\right)_{YM} &= (R, R)_{YM} - \left(R^{(1)}, R^{(1)}\right)_{YM} \\ &= \int (\delta g_{\alpha\beta}) \left(-2R^{\kappa}{}_{\lambda\nu}{}^{\alpha} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\nu\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\right) \\ &+ 2\int \mathcal{W}^{\kappa\beta\alpha\nu} Ric_{\kappa\nu} \delta g_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

a kako je

$$\begin{aligned}
R^{\kappa}{}_{\lambda\nu}{}^{\alpha}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\nu\beta} &= \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}\mathcal{W}^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}\mathcal{W}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} + 2Ric_{\lambda\nu}\mathcal{W}^{\alpha\nu\lambda\beta} - \frac{1}{2}Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} \\
R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} &= \mathcal{W}^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}\mathcal{W}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - 2Ric_{\lambda\nu}Ric^{\lambda\nu}
\end{aligned}$$

tada je

$$\delta\int \left(R^{(3)}, R^{(3)}\right)_{YM} = -2\int \mathcal{W}^{\kappa\beta\alpha\nu}Ric_{\kappa\nu}\delta g_{\alpha\beta}. \tag{4.7}$$

S druge strane,

$$\begin{aligned}
\delta\int (P_-, P_+) &= \frac{1}{2}\int (Ric, \delta Ric) + \frac{1}{2}\int (Ric, \delta Ric^{(2)}) \\
&= \frac{1}{2}\int (\delta Ric)_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\int (\delta Ric^{(2)})_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Koristeći se računom iz Dodatka D, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\delta\int (P_-, P_+) &= \frac{1}{2}\int (\delta g_{\alpha\beta})\bigg(-2Ric^{\kappa\alpha}Ric_{\kappa}{}^{\beta} + \frac{1}{2}Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} \\
&- R^{\kappa\alpha\beta}{}_{\nu}Ric_{\kappa}{}^{\nu} + Ric^{\kappa\alpha}Ric_{\kappa}{}^{\beta} - \frac{1}{2}Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\bigg) \\
&= \frac{1}{2}\int (\delta g_{\alpha\beta})\left(-Ric^{\kappa\alpha}Ric_{\kappa}{}^{\beta} - R^{\kappa\alpha\beta}{}_{\nu}Ric_{\kappa}{}^{\nu}\right)
\end{aligned}$$

jer je, zbog osobine $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$,

$$Ric^{(2)}{}_{\kappa\nu} = R_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\lambda\nu} = R_{\kappa\alpha\lambda\nu}g^{\alpha\lambda} = -R_{\alpha\kappa\lambda\nu}g^{\alpha\lambda} = R^{\lambda}{}_{\kappa\lambda\nu} = -Ric^{(1)}{}_{\kappa\nu}.$$

Budući da je

$$R^{\kappa\alpha\beta}{}_{\nu}Ric_{\kappa}{}^{\nu} = \mathcal{W}^{\kappa\alpha\beta}{}_{\nu}Ric_{\kappa}{}^{\nu} + Ric^{\beta\nu}Ric^{\alpha}{}_{\nu} - \frac{1}{2}Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}g^{\alpha\beta},$$

dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&\delta\int (P_-, P_+) = \\
&\qquad -\frac{1}{4}\int \left(4Ric^{\kappa\alpha}Ric_{\kappa}{}^{\beta} + 2\mathcal{W}^{\kappa\alpha\beta\nu}Ric_{\kappa\nu} - Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\delta g_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Kombinujući formule (4.4), (4.5), (4.6) - (4.8) i preimenovanjem nekih indeksa, dobijamo jednačinu polja

$$d_1\mathcal{W}^{\kappa\lambda\mu\nu}Ric_{\kappa\mu} + d_3\left(Ric^{\lambda\kappa}Ric_{\kappa}{}^{\nu} - \frac{1}{4}g^{\lambda\nu}Ric_{\kappa\mu}Ric^{\kappa\mu}\right) = 0 \tag{4.9}$$

pri čemu je

$$d_1 = b_{912} - b_{922} + b_{10}, \quad d_3 = b_{911} - b_{922}. \tag{4.10}$$

Jednačina (4.1) je identična jednačini u Riemannovom slučaju koja je dobijena u [24], koristeći uslov da je skalarna krivina jednaka nuli.

4.3 Varijacija po konekciji

Varijacije $\int (R^{(j)}, R^{(j)})_{YM}$ su ranije izračunate u Sekciji 4 u [23], gdje je pokazano da je

$$\int (R^{(j)}, R^{(j)})_{YM} = 4 \int \left((\delta_{YM} R^{(j)})^{\mu} (\delta\Gamma)_{\mu} \right) \tag{4.11}$$

pri čemu je

$$(\delta_{\mathrm{YM}} R)^{\mu} := \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{det} g|}} \ (\partial_{\nu} + [\Gamma_{\nu}\,,\,\cdot\,]) \left(\sqrt{|\det g|}\, R^{\mu\nu} \right)$$

Yang-Millsova divergencija.

Koristeći jednakost $\{\Gamma\}^{\xi}{}_{\xi\nu} = \dfrac{\partial_{\nu} |\det g|}{2|\det g|}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta \int (R^{(1)}, R^{(1)})_{YM} &= 4 \int (\delta_{YM} R^{(1)})^{\mu} (\delta\Gamma)_{\mu} = \\
&= 4 \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}) \Big(\partial_{\nu} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} + \{\Gamma\}^{\xi}{}_{\xi\nu} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} \\
&+ \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta} R^{(1)}{}^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu} \Big).
\end{aligned}$$

Budući da je

$$\nabla_{\nu} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} = \partial_{\nu} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta} R^{(1)}{}^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\eta\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\nu\eta} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\eta}$$

tada je

$$\begin{aligned}
\delta \int (R^{(1)}, R^{(1)})_{YM} &= 4 \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}) [\nabla_{\nu} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\eta\nu} \\
&- \Gamma^{\nu}{}_{\nu\eta} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\eta} + \{\Gamma\}^{\xi}{}_{\xi\nu} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}] \\
&= 4 \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}) [\nabla_{\nu} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\eta\nu} \\
&\quad -\Gamma^{\xi}{}_{\xi\nu} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} + \{\Gamma\}^{\xi}{}_{\xi\nu} R^{(1)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}].
\end{aligned}$$

Koristeći jednakost $\Gamma = \{\Gamma\} + K$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta\int (R^{(1)}, R^{(1)})_{YM} &= 4\int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda})\left[\nabla_\nu {R^{(1)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta}{R^{(1)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\eta\nu} - K^{\xi}{}_{\xi\nu}{R^{(1)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\right] \\
&= 4\int (\delta\Gamma^{\kappa\mu\lambda})\left[\nabla_\nu R^{(1)}{}_{\lambda\kappa\mu}{}^{\nu} - \Gamma_{\mu\nu\eta}R^{(1)}{}_{\lambda\kappa}{}^{\eta\nu} - K^{\xi}{}_{\xi\nu}R^{(1)}{}_{\lambda\kappa\mu}{}^{\nu}\right] \\
&= 4\int (\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa})\left[\nabla_\nu R^{(1)}{}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu} - \Gamma_{\mu\nu\eta}R^{(1)}{}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu} - K^{\xi}{}_{\xi\nu}R^{(1)}{}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu}\right].
\end{aligned}$$

Kako je

$$R^{(1)}{}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\kappa\mu}Ric_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu}Ric_{\kappa\nu} - g_{\kappa\nu}Ric_{\lambda\mu} + g_{\lambda\nu}Ric_{\kappa\mu}\right)$$

i budući da je prostorvrijeme metrički kompatibilno, dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta\int (R^{(1)}, R^{(1)})_{YM} &= 2\int (\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa})[\nabla_\lambda Ric_{\kappa\mu} - \nabla_\kappa Ric_{\lambda\mu} + g_{\kappa\mu}\nabla_\xi Ric_{\lambda}{}^{\xi} \\
&- g_{\mu\lambda}\nabla_\xi Ric_{\kappa}{}^{\xi} + Ric_{\kappa}{}^{\eta}(K_{\mu\eta\lambda} - K_{\mu\lambda\eta}) \\
&+ Ric_{\lambda}{}^{\eta}(K_{\mu\kappa\eta} - K_{\mu\eta\kappa}) + g_{\mu\lambda}K^{\xi}{}_{\xi\eta}Ric_{\kappa}{}^{\eta} \\
&- K^{\eta}{}_{\eta\lambda}Ric_{\kappa\mu} + K^{\xi}{}_{\xi\kappa}Ric_{\lambda\mu} - g_{\kappa\mu}K^{\xi}{}_{\xi\eta}Ric_{\lambda}{}^{\eta}]. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Odredimo varijaciju $\delta\int (R^{(3)}, R^{(3)})_{YM}$:

$$\begin{aligned}
\delta\int (R^{(3)}, R^{(3)})_{YM} &= 4\int (\delta_{YM}R^{(3)})^{\mu}(\delta\Gamma)_{\mu} \\
&= 4\int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda})\Big(\partial_\nu {R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} + \{\Gamma\}^{\xi}{}_{\xi\nu}{R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} \\
&+ \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}{R^{(3)}}^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa}{R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu}\Big).
\end{aligned}$$

Kako je

$$\nabla_\nu {R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} = \partial_\nu {R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}{R^{(3)}}^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa}{R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta}{R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\eta\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\nu\eta}{R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\eta}$$

tada je

$$\begin{aligned}
\delta\int (R^{(3)}, R^{(3)})_{YM} &= 4\int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda})[\nabla_\nu {R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta}{R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\eta\nu} \\
&- \Gamma^{\nu}{}_{\nu\eta}{R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\eta} + \{\Gamma\}^{\xi}{}_{\xi\nu}{R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}] \\
&= 4\int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda})[\nabla_\nu {R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta}{R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\eta\nu} \\
&\quad -\Gamma^{\xi}{}_{\xi\nu}{R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} + \{\Gamma\}^{\xi}{}_{\xi\nu}{R^{(3)}}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}].
\end{aligned}$$

Preimenovanjem indeksa i koristeći jednakost $\Gamma = \{\Gamma\} + K$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta\int (R^{(3)}, R^{(3)})_{YM} &= 4\int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}) \left[\nabla_\nu R^{(3)\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta} R^{(3)\lambda}{}_{\kappa}{}^{\eta\nu} - K^{\xi}{}_{\xi\nu} R^{(3)\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\right] \\
&= 4\int (\delta\Gamma^{\kappa\mu\lambda}) \left[\nabla_\nu R^{(3)}{}_{\lambda\kappa\mu}{}^{\nu} - \Gamma_{\mu\nu\eta} R^{(3)}{}_{\lambda\kappa}{}^{\eta\nu} - K^{\xi}{}_{\xi\nu} R^{(3)}{}_{\lambda\kappa\mu}{}^{\nu}\right] \\
&= 4\int (\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa}) \left[\nabla_\nu R^{(3)}{}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu} - \Gamma_{\mu\nu\eta} R^{(3)}{}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu} - K^{\xi}{}_{\xi\nu} R^{(3)}{}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu}\right].
\end{aligned}$$

Lema 4.3.1 *Ako je $\{\Gamma\}$ Christoffelov simbol druge vrste i $\mathcal{W}$ Weylov tenzor, tada je*

$$\{\Gamma\}_{\mu\nu\eta}\mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\nu\eta} = 0.$$

Dokaz. Zbog simetričnosti Christoffelovog simbola druge vrste i antisimetričnosti Weylovog tenzora, dobijamo

$$\begin{aligned}
S &= \{\Gamma\}_{\mu\nu\eta}\mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\nu\eta} = -\{\Gamma\}_{\mu\nu\eta}\mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu} = -\{\Gamma\}_{\mu\eta\nu}\mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu} \\
&= -\{\Gamma\}_{\mu\nu\eta}\mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\nu\eta} = -S
\end{aligned}$$

odakle je $S = 0$.

Na osnovu Leme 4.3.1 i jednakosti $\Gamma = \{\Gamma\} + K$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\delta\int (R^{(3)}, R^{(3)})_{YM} = \\
&= 4\int (\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa}) \left[\nabla_\nu \mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu} - \left(\{\Gamma\}_{\mu\nu\eta} + K_{\mu\nu\eta}\right)\mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu} - K^{\xi}{}_{\xi\nu}\mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu}\right] \\
&= 4\int (\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa}) \left[\nabla_\nu \mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu} - K_{\mu\nu\eta}\mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu} - \{\Gamma\}_{\mu\nu\eta}\mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu} - K^{\xi}{}_{\xi\nu}\mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu}\right] \\
&= 4\int (\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa}) \left[\nabla_\nu \mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu} - K_{\mu\nu\eta}\mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu} - K^{\xi}{}_{\xi\nu}\mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu}\right]. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Odredimo varijaciju $\delta\int(P_-, P_+)$. Koristeći račun iz Dodatka D, dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta\int (P_-, P_+) &= \frac{1}{2}\int (Ric, \delta Ric) + \frac{1}{2}\int (Ric, \delta Ric^{(2)}) \\
&= \int (\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa})\frac{1}{2}\left(-\nabla_\lambda Ric_{\kappa\mu} + g_{\mu\lambda}\nabla_\xi Ric_{\kappa}{}^{\xi} + K_{\mu\lambda\eta} Ric_{\kappa}{}^{\eta}\right. \\
&- \left. g_{\mu\lambda}K^{\xi}{}_{\xi\eta}Ric_{\kappa}{}^{\eta} + K^{\eta}{}_{\eta\lambda}Ric_{\kappa\mu} - K_{\mu\eta\lambda}Ric_{\kappa}{}^{\eta}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\Big(-\nabla_\kappa Ric_{\lambda\mu} + g_{\kappa\mu}\nabla_\xi Ric_{\lambda}{}^{\xi} - \nabla_\xi g_{\kappa}{}^{\xi} Ric_{\lambda\mu} \\
&+ \nabla_\xi g_{\kappa\mu} Ric_{\lambda}{}^{\xi} - K_{\mu\eta\kappa}Ric_{\lambda}{}^{\eta} + K^{\xi}{}_{\xi\kappa}Ric_{\lambda\mu} \\
&+ K_{\mu\kappa\eta}Ric_{\lambda}{}^{\eta} - g_{\kappa\mu}K^{\xi}{}_{\xi\eta}Ric_{\lambda}{}^{\eta}\Big).
\end{aligned}$$

Ukoliko iskoristimo da je naše prostorvrijeme metrički kompatibilno, dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta \int (P_-, P_+) &= -\frac{1}{2} \int (\delta \Gamma^{\lambda\mu\kappa}) [\nabla_\lambda Ric_{\kappa\mu} + \nabla_\kappa Ric_{\lambda\mu} - g_{\mu\lambda} \nabla_\xi Ric_\kappa{}^\xi \\
&- g_{\kappa\mu} \nabla_\xi Ric_\lambda{}^\xi + Ric_\kappa{}^\eta (K_{\mu\eta\lambda} - K_{\mu\lambda\eta}) + Ric_\lambda{}^\eta (K_{\mu\eta\kappa} - K_{\mu\kappa\eta}) \\
&+ K^\xi{}_{\xi\eta} (g_{\mu\lambda} Ric_\kappa{}^\eta + g_{\kappa\mu} Ric_\lambda{}^\eta) - K^\xi{}_{\xi\lambda} Ric_{\kappa\mu} - K^\xi{}_{\xi\kappa} Ric_{\lambda\mu}].
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Kombinujući formule (4.4), (4.5), (4.12)–(4.14), dobijamo ekplicitni prikaz jednačine (4.2):

$$\begin{aligned}
0 &= d'_6 \Big(\nabla_\lambda Ric_{\kappa\mu} - g_{\mu\lambda} \nabla_\eta Ric_\kappa{}^\eta + Ric_\kappa{}^\eta (K_{\mu\eta\lambda} - K_{\mu\lambda\eta}) + g_{\mu\lambda} K^\xi{}_{\xi\eta} Ric_\kappa{}^\eta \\
&\quad - K^\xi{}_{\xi\lambda} Ric_{\kappa\mu} \Big) \\
&- d'_7 \Big(\nabla_\kappa Ric_{\lambda\mu} - g_{\kappa\mu} \nabla_\eta Ric_\lambda{}^\eta + Ric_\lambda{}^\eta (K_{\mu\eta\kappa} - K_{\mu\kappa\eta}) + g_{\mu\kappa} K^\xi{}_{\xi\eta} Ric_\lambda{}^\eta \\
&\quad - K^\xi{}_{\xi\kappa} Ric_{\lambda\mu} \Big) \\
&+ 2b_{10} \Big(\nabla_\eta \mathcal{W}^\eta{}_{\mu\lambda\kappa} - K_{\mu\xi\eta} \mathcal{W}^{\eta\xi}{}_{\kappa\lambda} + K^\xi{}_{\xi\eta} \mathcal{W}^\eta{}_{\mu\kappa\lambda} \Big)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

pri čemu je

$$d'_6 = b_{912} - b_{911}, \quad d'_7 = b_{912} - b_{922}.$$

Iskoristimo sada Bianchijev identitet za krivinu

$$(\partial_\xi + [\Gamma_\xi, \cdot]) R_{\mu\nu} + (\partial_\nu + [\Gamma_\nu, \cdot]) R_{\xi\mu} + (\partial_\mu + [\Gamma_\mu, \cdot]) R_{\nu\xi} = 0, \tag{4.16}$$

pri čemu smo sakrili dva indeksa koristeći matričnu notaciju

$$[\Gamma_\xi, R_{\mu\nu}]^\kappa{}_\lambda = \Gamma^\kappa{}_{\xi\eta} R^\eta{}_{\lambda\mu\nu} - R^\kappa{}_{\eta\mu\nu} \Gamma^\eta{}_{\xi\lambda}.$$

Koristeći pretpostavke $(i) - (iii)$ i kontrakcijom indeksa, dobijamo[2]

$$\begin{aligned}
&\nabla_\xi Ric_{\lambda\nu} - \nabla_\nu Ric_{\lambda\xi} \\
&\quad + g_{\lambda\xi} \nabla_\mu Ric^\mu{}_\nu - g_{\lambda\nu} \nabla_\mu Ric^\mu{}_\xi + Ric^\mu{}_\eta (g_{\lambda\xi} K^\eta{}_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu} K^\eta{}_{\mu\xi}) \\
&\quad + Ric^\mu{}_\xi (K_{\nu\mu\lambda} - K_{\mu\nu\lambda}) + Ric^\mu{}_\nu (K_{\mu\xi\lambda} - K_{\xi\mu\lambda}) \\
&\quad + Ric_{\lambda\nu} (K^\mu{}_{\xi\mu} - K^\mu{}_{\mu\xi}) + Ric_{\lambda\xi} (K^\mu{}_{\mu\nu} - K^\mu{}_{\nu\mu}) \\
&\quad + 2 \left(\nabla_\mu \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\xi} + \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\xi\eta} (K^\eta{}_{\nu\mu} - K^\eta{}_{\mu\nu}) + \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\eta} (K^\eta{}_{\mu\xi} - K^\eta{}_{\xi\mu}) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

[2]Za detaljan račun pogledati Dodatak C.

Sa još jednom kontrakcijom indeksa, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\nabla_\eta Ric^\eta{}_\kappa &= -\frac{1}{2}Ric^\eta{}_\xi K^\xi{}_{\eta\kappa} - \frac{1}{2}Ric^\xi{}_\kappa(K^\eta{}_{\xi\eta} - K^\eta{}_{\eta\xi}) - \frac{1}{2}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\kappa\xi}(K^\xi{}_{\eta\zeta} - K^\xi{}_{\zeta\eta}) \\
\nabla_\eta Ric^\eta{}_\lambda &= -\frac{1}{2}Ric^\eta{}_\xi K^\xi{}_{\eta\lambda} - \frac{1}{2}Ric^\xi{}_\lambda(K^\eta{}_{\xi\eta} - K^\eta{}_{\eta\xi}) - \frac{1}{2}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\lambda\xi}(K^\xi{}_{\eta\zeta} - K^\xi{}_{\zeta\eta}).
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Uvrštavanjem (4.18) u (4.17), dobijamo

$$
\begin{aligned}
\nabla_\eta \mathcal{W}^\eta{}_{\mu\lambda\kappa} &= \mathcal{W}^\eta{}_{\mu\kappa\xi}(K^\xi{}_{\eta\lambda} - K^\xi{}_{\lambda\eta}) + \mathcal{W}^\eta{}_{\mu\lambda\xi}(K^\xi{}_{\kappa\eta} - K^\xi{}_{\eta\kappa}) \\
&+ \frac{1}{4}(K^\xi{}_{\zeta\eta} - K^\xi{}_{\eta\zeta})(g_{\mu\lambda}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\kappa\xi} - g_{\mu\kappa}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\lambda\xi}) \\
&+ \frac{1}{2}[\nabla_\lambda Ric_{\mu\kappa} - \nabla_\kappa Ric_{\mu\lambda} + Ric^\eta{}_\kappa(K_{\eta\lambda\mu} - K_{\lambda\eta\mu}) \\
&+ Ric^\eta{}_\lambda(K_{\kappa\eta\mu} - K_{\eta\kappa\mu}) + Ric_{\mu\lambda}(K^\eta{}_{\eta\kappa} - K^\eta{}_{\kappa\eta}) \\
&+ Ric_{\mu\kappa}(K^\eta{}_{\lambda\eta} - K^\eta{}_{\eta\lambda})] + \frac{1}{4}Ric^\eta{}_\xi(g_{\mu\lambda}K^\xi{}_{\eta\kappa} - g_{\mu\kappa}K^\xi{}_{\eta\lambda}) \\
&+ \frac{1}{4}(K^\eta{}_{\eta\xi} - K^\eta{}_{\xi\eta})(g_{\mu\lambda}Ric^\xi{}_\kappa - g_{\mu\kappa}Ric^\xi{}_\lambda).
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Formule (4.18) i (4.19) omogućavaju nam da iz formule (4.15) isključimo izraze $\nabla_\eta Ric_\kappa{}^\eta$, $\nabla_\eta Ric_\lambda{}^\eta$ i $\nabla_\eta \mathcal{W}^\eta{}_{\mu\lambda\kappa}$, čime dobijamo jednačinu (4.2).

4.4 Diskusija

U ovom dijelu pokazaćemo da generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom zadovoljavaju jednačine polja (4.1) i (4.2), te ponuditi jednu konjekturu vezanu za novu klasu rješenja kvadratne metrički afine gravitacije.

Lema 4.4.1 *Generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom zadovoljavaju jednačine polja (4.1) i (4.2).*

Dokaz. Lemu dokazujemo direktnom zamjenom formula za torziju (kontorziju), Ricci krivinu i Weylovu krivinu generaliziranih pp-talasa u jednačine (4.1) i (4.2). Kako je torzija generaliziranih pp-talasa sa paralelnom Ricci krivinom čisto torzijska, tada je veza između torzije i kontorzije data sa $T_{\lambda\mu\nu} = K_{\mu\lambda\nu}$ i izrazi koji sadrže $K^\lambda{}_{\lambda\mu}$ su jednaki nuli. Budući da posmatrani generalizirani pp-talasi imaju paralelnu Ricci krivinu, tada izrazi koji sadrže ∇Ric u jednačini (4.2) nestaju. Na osnovu rezultata iz Sekcije 3.2, torzija, Ricci krivina i Weylova krivina generaliziranih pp-talasa mogu biti zapisani u obliku

$$T = \sum_{i,j=1}^{2} t_{ij} m_i \otimes (l \wedge m_j) + \sum_{i=1}^{2} t_i l \otimes (l \wedge m_i) \tag{4.20}$$

$$\mathcal{W} = \sum_{i,j=1}^{2} w_{ij} (l \wedge m_i) \otimes (l \wedge m_j) \tag{4.21}$$

$$Ric = sl \otimes l \tag{4.22}$$

pri čemu su t_{ij}, t_i, s, w_{ij} realne konstante koje zadovoljavaju uslove

$$t_{ij} = t_{ji}, \quad w_{ij} = w_{ji}, \quad t_{11} + t_{22} = w_{11} + w_{22} = 0,$$

i gdje su vektori l i m su definisani u Sekciji 3.1, a $m_1 = \mathrm{Re}(m)$ i $m_2 = \mathrm{Im}(m)$. Primjetimo da realni vektori l, m_1, m_2 zadovoljavaju uslove

$$l \cdot l = l \cdot m_1 = l \cdot m_2 = m_1 \cdot m_2 = 0, \quad m_1 \cdot m_1 = m_2 \cdot m_2 = -1.$$

Svi izrazi koji sadrže Ricci krivinu u jednačinama (4.1), (4.2) su jednaki nuli jer se u njima vrši kontrakcija po indeksu Ricci krivine, koja je oblika (4.22), pri čemu je vektor l ortogonalan na sve vektore koji se pojavljuju u formulama (4.20) i (4.21). Ukoliko posmatramo izraze u kojima se množi Weylova krivina i torzija, izrazi u kojima se kontrakcija vrši po tri indeksa su jednaki nuli, jer zbog formule (4.20) barem jedna kontrakcija se odnosi na vektor l. To se isto odnosi i na izraze koji sadrže $\mathcal{W}^{\xi\eta}{}_{\kappa\lambda} T_{\eta\mu\xi}$, gdje je kontrakcija po dva indeksa, jer zbog formule (4.21), barem jedna kontrakcija se odnosi na vektor l. Ostalo je još da pokažemo da je

$$\mathcal{W}^{\eta}{}_{\mu\kappa\xi}(K^{\xi}{}_{\eta\lambda} - K^{\xi}{}_{\lambda\eta}) + \mathcal{W}^{\eta}{}_{\mu\lambda\xi}(K^{\xi}{}_{\kappa\eta} - K^{\xi}{}_{\eta\kappa}) = 0$$

tj.

$$\mathcal{W}^{\eta}{}_{\mu\kappa\xi}(T_{\eta}{}^{\xi}{}_{\lambda} - T_{\lambda}{}^{\xi}{}_{\eta}) + \mathcal{W}^{\eta}{}_{\mu\lambda\xi}(T_{\kappa}{}^{\xi}{}_{\eta} - T_{\eta}{}^{\xi}{}_{\kappa}) = 0. \tag{4.23}$$

Tenzor na lijevoj strani jednakosti (4.23) je proporcionalan sa $l_\lambda l_\mu l_\kappa$. U specijalnim lokalnim koordinatama, ovo možemo zapisati u obliku

$$\mathcal{W}^{\eta}{}_{\mu\kappa\xi}(T_{\eta}{}^{\xi}{}_{\lambda} - T_{\lambda}{}^{\xi}{}_{\eta}) = \left(-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(b) f_{11} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(b) f_{22} + \mathrm{Im}(b) f_{12}\right) l_\mu l_\kappa l_\lambda,$$

pri čemu je $b = \frac{1}{2} h'(\varphi) h(\varphi)$. Budući da je lijeva strana jednakosti (4.23) antisimetričan tenzor po indeksima κ i λ, tada je jednaka nuli.

4.4.1 Usporedba sa Singhovim radom

U eventualnom posmatranju i pronalasku novih rješenja kvadratne metrički–afine gravitacije, od posebnog nam je interesa rad Singha [21]. U [21] Singh prezentira rješenja vakuumskih jednačina polja koja imaju čisto *aksijalnu* torziju (vidi Dodatak A za ireducibilne dijelove torzije). Ona čine klasu rješenja koja se ne mogu dobiti ansatzom dvostruke dualnosti korištene od strane Mielkea, Hehla i Baeklera na primjer. U stvari, Singh koristi 'tehniku koeficijenata spina' iz prethodnog rada sa Griffithsom u konstrukciji svojih rješenja.

Treba napomenuti da u svom radu Singh nije operirao sa postavkom najgeneralnije čisto kvadratne forme sa 16 članova i rješenja su dobijena za Yang–Millsov slučaj (1.7). Za razliku od ranije dobijenih rješenja sa Griffithsom, $\{Ric\}$ se ne podrazumjeva da je nula. Očito je da se ta rješenja razlikuju od onih prezentovanih u ovoj disertaciji, jer je naša torzija čisto tenzorska. Prije svega nas interesuje istinitost slijedećeg:

Konjektura 4.4.1 *Postoje čisto aksijalni torzijski talasi koji su rješenja jednačina (1.5), (1.6).*

S obzirom na istinitost proširenja ranijih čisto tenzorskih torzijskih rezultata iz rada Singha sa Griffithsom na opći slučaj, očekujemo da u skoroj budućnosti pronađemo čisto aksijalne torzijske talase koji su rješenja našeg problema.

Treba napomenuti da su eksplicitne forme jednačina prezentovane u Sekciji 4.1 urađene bez ikakve pretpostavke o strukturi torzije. Stoga bi se, pod pretpostavkom čisto aksijalne torzije, jednačine (4.1) i (4.2) značajno pojednostavile, vidi također Dodatak A za više informacija.

Stoga se usuđujemo predložiti novu generalizaciju pp-talasa na slijedeći način:

Konjektura 4.4.2 *Postoji klasa prostorvremena sa pp-metrikom i eksplicitno datom čisto aksijalnom torzijom koja su rješenja jednačina (1.5), (1.6).*

Naša nada je da u bliskoj budućnosti završimo rad započet u ovoj disertaciji dokazom ovih dvaju konjektura, što je veoma vjerovatno s obzirom na dosadašnji rad iz ove oblasti (vidi na primjer [17]), te da pokušamo dati fizikalnu interpretaciju ovih novih rješenja poređenjem sa postojećim Riemannovim rješenjima, što bi predstavljalo naučni dopinos od velikog značaja u alternativnim teorijama gravitacije.

Dodatak A

Ireducibilni dijelovi torzije

U ovom dijelu rada, koristeći holonomičnu notaciju, predstavićemo ireducibilne dijelove torzije, uglavnom vodeći se izlaganjem u doktorskom radu [16]. Ireducibilni dijelovi torzije su

$$
\begin{aligned}
T^{(1)} &= T - T^{(2)} - T^{(3)} && \text{(A.1)}\\
T^{(2)}{}_{\lambda\mu\nu} &= g_{\lambda\mu} v_\nu - g_{\lambda\nu} v_\mu && \text{(A.2)}\\
T^{(3)} &= *w && \text{(A.3)}
\end{aligned}
$$

pri čemu su

$$v_\nu = \frac{1}{3} T^\lambda{}_{\lambda\nu}\,, \quad w_\nu = \frac{1}{6}\sqrt{|\det g|}\, T^{\kappa\lambda\mu} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}. \tag{A.4}$$

Dijelovi $T^{(1)}, T^{(2)}$ i $T^{(3)}$ se nazivaju redom *tenzorska torzija*, *trag torzija* i *aksijalna torzija*.
Djelovanje Hodgeove zvjezdice na torziju definišemo sa

$$(*T)_{\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2}\sqrt{|\det g|}\, T_{\lambda\mu'\nu'}\, \varepsilon^{\mu'\nu'}{}_{\mu\nu}. \tag{A.5}$$

Hodgeova zvjezdica preslikava tenzorsku torziju u tenzorsku torziju, trag torziju u aksijalnu torziju i aksijalnu torziju u trag torziju:

$$
\begin{aligned}
(*T)^{(1)} &= *(T^{(1)}), && \text{(A.6)}\\
(*T)^{(2)}{}_{\lambda\mu\nu} &= g_{\lambda\mu} w_\nu - g_{\lambda\nu} w_\mu, && \text{(A.7)}\\
(*T)^{(3)} &= - * v. && \text{(A.8)}
\end{aligned}
$$

Hodgeova zvjezdica koja se pojavljuje u formulama (A.3) i (A.8) je standardna Hodgeova zvjezdica i razlikuje se od Hodgeove zvjezdice definisane sa (A.5). Ova dekompozicija torzije vrijedi ako je torzija realna a metrika

Lorentzova. Ukoliko je torzija kompleksna ili ako je $\det g > 0$, tada se po–tprostor tenzorske torzije dalje rastavlja na svojstvene prostore Hodgeove zvjezdice.
Uvrštavajući formule (A.1)-(A.3) u formulu za kontorziju

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}\right)$$

i formule

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = K^{\lambda}{}_{\mu\nu} - K^{\lambda}{}_{\nu\mu}$$

u formulu (A.4), dobijamo ireducibilne dijelove kontorzije

$$\begin{aligned} K^{(1)} &= K - K^{(2)} - K^{(3)} \\ K^{(2)}{}_{\lambda\mu\nu} &= g_{\lambda\mu}v_{\nu} - g_{\nu\mu}v_{\lambda} \\ K^{(3)} &= \frac{1}{2} * w \end{aligned}$$

pri čemu su

$$v_{\nu} = \frac{1}{3}K^{\lambda}{}_{\lambda\nu}, \quad w_{\nu} = \frac{1}{3}\sqrt{|\det g|}K^{\kappa\lambda\mu}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}.$$

Ireducibilni dijelovi torzije i kontorzije povezani su relacijama

$$\begin{aligned} T^{(i)}{}_{\kappa\lambda\mu} &= K^{(i)}{}_{\lambda\kappa\mu}, \quad i = 1, 2, \\ T^{(3)}{}_{\kappa\lambda\mu} &= 2K^{(3)}{}_{\kappa\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Dodatak B

Ireducibilni dijelovi krivine

Neka je $x \in M$. Sa $\mathbf{R}$ označavamo 96-dimenzionalni vektorski prostor realnih tenzora $R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}$ koji zadovoljavaju uslov

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = -R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}. \tag{B.1}$$

Neka je g Lorentzova metrika u tački $x \in M$ i $O(1,3)$ odgovarajuća Lorentzova grupa. Kao što je pokazano u [7], vektorski prostor $\mathbf{R}$ se može napisati kao direktna suma 11 potprostora koji su invarijantni i ireducibilni pod akcijom $O(1,3)$. Potprostori vektorskog prostora $\mathbf{R}$ su:

1. dva potprostora dimenzije jedan koje označavamo sa $R^{(1)}$ i $R^{(1)}_{*}$,
2. tri potprostora dimenzije šest koje označavamo sa $R^{(6,l)}$, $(l = 1,2,3)$,
3. četiri potprostora dimenzije devet koje označavamo sa $R^{(9,l)}$ i $R^{(9,l)}_{*}$ $(l = 1,2)$,
4. jedan potprostor dimenzije deset kojeg označavamo sa $R^{(10)}$, i
5. jedan potprostor dimenzije trideset kojeg označavamo sa $R^{(30)}$.

Za dva potprostora kažemo da su izomorfna ako postoji linearna bijekcija između njih koja komutira sa akcijom $O(1,3)$. Postoje tri grupe izomorfnih potprostora a to su

$$\{R^{(6,l)}, l = 1,2,3\}, \quad \{R^{(9,l)}, l = 1,2\}, \quad \{R^{(9,l)}_{*}, l = 1,2\}. \tag{B.2}$$

Eksplicitni prikaz ireducibilnih dijelova čija je dimenzija manja od 10 je dat sa:

1. tenzor krivine potprostora $R^{(1)}$ je dat sa

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = a_1(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu})\mathcal{R},$$

2. tenzor krivine potprostora $R_*^{(1)}$ je dat sa

$$R^*{}_{\kappa\lambda\mu\nu} = a_1^*(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu})\mathcal{R}_*,$$

3. tenzor krivine potprostora $R^{(6,l)}$ je dat sa

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= a_{6l1}(g_{\kappa\mu}\mathcal{A}^{(l)}{}_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}\mathcal{A}^{(l)}{}_{\lambda\mu}) + a_{6l2}(g_{\lambda\mu}\mathcal{A}^{(l)}{}_{\kappa\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{A}^{(l)}{}_{\kappa\mu}) \\ &\quad + a_{6l3}g_{\kappa\lambda}\mathcal{A}^{(l)}{}_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

4. tenzor krivine potprostora $R^{(9,l)}$ je dat sa

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = a_{9l1}(g_{\kappa\mu}\mathcal{S}^{(l)}{}_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}\mathcal{S}^{(l)}{}_{\lambda\mu}) + a_{9l2}(g_{\lambda\mu}\mathcal{S}^{(l)}{}_{\kappa\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{S}^{(l)}{}_{\kappa\mu}),$$

5. tenzor krivine potprostora $R_*^{(9,l)}$ je dat sa

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = a_{9l1}^*(g_{\kappa\mu}\mathcal{S}_*^{(l)}{}_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}\mathcal{S}_*^{(l)}{}_{\lambda\mu}) + a_{9l2}^*(g_{\lambda\mu}\mathcal{S}_*^{(l)}{}_{\kappa\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{S}_*^{(l)}{}_{\kappa\mu}),$$

pri čemu su $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}_*$ proizvoljni skalari, $\mathcal{A}^{(l)}$ proizvoljni antisimetrični tenzori drugog reda i $\mathcal{S}^{(l)}$,$\mathcal{S}_*^{(l)}$ proizvoljni simetrični bez traga tenzori drugog reda, konstante a su fiksne realne konstante pri čemu a_1, a_1^*, $\det(a_{6lm})_{l,m=1}^3$, $\det(a_{9lm})_{l,m=1}^2$ i $\det(a_{9lm}^*)_{l,m=1}^2$ nisu nula.
Praktično je izabrati

$$a_1 = a_1^* = \frac{1}{12}, \qquad (a_{6lm}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$(a_{9lm}) = (a_{9lm}^*) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Tada, veličine $\mathcal{R}, \mathcal{R}_*, \mathcal{A}^{(l)}, \mathcal{S}^{(l)}, \mathcal{S}_*^{(l)}$, pomoću tenzora krivine, možemo iskazati sljedećim jednostavnim formulama

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R} := R^{\kappa\lambda}{}_{\kappa\lambda},\\
&Ric^{(1)}{}_{\mu\nu} := R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu}, \qquad Ric^{(2)}{}_{\mu\nu} := R_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\kappa\nu},\\
&\mathcal{R}ic^{(1)} := Ric^{(1)} - \frac{1}{4}\mathcal{R}g, \qquad \mathcal{R}ic^{(2)} := Ric^{(2)} + \frac{1}{4}\mathcal{R}g,\\
&\mathcal{S}^{(l)}{}_{\mu\nu} := \frac{\mathcal{R}ic^{(l)}{}_{\mu\nu} + \mathcal{R}ic^{(l)}{}_{\nu\mu}}{2}, \quad \mathcal{A}^{(l)}{}_{\mu\nu} := \frac{\mathcal{R}ic^{(l)}{}_{\mu\nu} - \mathcal{R}ic^{(l)}{}_{\nu\mu}}{2}, \quad (l = 1, 2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathcal{A}^{(3)}{}_{\mu\nu} := R^{\kappa}{}_{\kappa\mu\nu},
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_* := (R^*)^{\kappa\lambda}{}_{\kappa\lambda},\\
&Ric_*^{(1)}{}_{\mu\nu} := (R^*)^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu}, \qquad Ric_*^{(2)}{}_{\mu\nu} := (R^*)_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\kappa\nu},\\
&\mathcal{R}ic_*^{(1)} := Ric_*^{(1)} - \frac{1}{4}\mathcal{R}_*g, \qquad \mathcal{R}ic_*^{(2)} := Ric_*^{(2)} + \frac{1}{4}\mathcal{R}_*g,\\
&\mathcal{S}_*^{(l)}{}_{\mu\nu} := \frac{\mathcal{R}ic^{(l)}{}_{\mu\nu} + \mathcal{R}ic^{(l)}{}_{\nu\mu}}{2}, \quad \mathcal{A}_*^{(l)}{}_{\mu\nu} := \frac{\mathcal{R}ic_*^{(l)}{}_{\mu\nu} - \mathcal{R}ic_*^{(l)}{}_{\nu\mu}}{2}, \quad (l = 1, 2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathcal{A}_*^{(3)}{}_{\mu\nu} := (R^*)^{\kappa}{}_{\kappa\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da nismo koristili tenzore $\mathcal{A}_*^{(l)}$ budući da tenzori $\mathcal{A}^{(l)}$ i $\mathcal{A}_*^{(l)}$ zavisni jer su tenzori $\mathcal{A}^{(l)}$ linearna kombinacija Hodgeovih duala od $\mathcal{A}_*^{(l)}$, i obrnuto. Potprostor $R^{(10)}$ je potprostor za koji vrijede jednakosti (svi mogući tragovi su nula)

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\nu} = (R^*)^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\nu} = 0, \quad R_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\kappa\nu} = (R^*)_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\kappa\nu} = 0, \quad R^{\kappa}{}_{\kappa\mu\nu} = 0, \tag{B.3}$$

i za koji još vrijedi $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$.
Potprostor $R^{(30)}$ je potprostor za koji vrijedi (B.3) i osobina $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\lambda\kappa\mu\nu}$.
Prostor **R** možemo napisati kao direktnu sumu jedanaest potprostora

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(1)} \oplus \mathbf{R}_*^{(1)} \oplus_{i=1}^{3} \mathbf{R}^{(6,l)} \oplus_{i=1}^{2} \mathbf{R}^{(9,l)} \oplus_{i=1}^{2} \mathbf{R}_*^{(9,l)} \oplus \mathbf{R}^{(10)} \oplus \mathbf{R}^{(30)}$$

što znači da svaki element $R \in \mathbf{R}$ na jedinstven način možemo napisati u obliku

$$R = R^{(1)} + R_*^{(1)} + \sum_{l=1}^{3} R^{(6,l)} + \sum_{l=1}^{2} R^{(9,l)} + \sum_{l=1}^{2} R_*^{(9,l)} + R^{(10)} + R^{(30)},$$

pri čemu je ireducibilni dio R iz odgovarajućeg potprostora. Potprostore $\mathbf{R}^{(1)}$, $\mathbf{R}_*^{(1)}$, $\mathbf{R}^{(10)}$, $\mathbf{R}^{(30)}$ nazivamo jednostavnim jer nisu izomorfni niti jednom drugom potprostoru. Prema tome , i ireducibilne dijelove $R^{(1)}$, $R_*^{(1)}$, $R^{(10)}$, $R^{(30)}$ također nazivamo jednostavnim.

Kvadratne forme na krivini

Skalarni proizvod tenzora drugog reda definišemo sa

$$(K, L) := K_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \tag{B.4}$$

i Yang-Millsov skalarni proizvod tenzora krivine sa

$$(R, Q)_{YM} := R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} Q^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}. \tag{B.5}$$

Lema B.0.2 *Neka je $q : \boldsymbol{R} \to \mathbb{R}$ $O(1,3)$ invarijantna kvadratna forma na krivine. Tada je*

$$\begin{aligned} q(R) &= b_1 \mathcal{R}^2 + b_1^* \mathcal{R}_*^2 + \sum_{l,m=1}^{3} b_{6lm} \left(\mathcal{A}^{(l)}, \mathcal{A}^{(m)}\right) + \sum_{l,m=1}^{2} b_{9lm} \left(\mathcal{S}^{(l)}, \mathcal{S}^{(m)}\right) \\ &+ \sum_{l,m=1}^{2} b_{9lm}^* \left(\mathcal{S}_*^{(l)}, \mathcal{S}_*^{(m)}\right) + b_{10} (R^{(10)}, R^{(10)})_{YM} + b_{30} (R^{(30)}, R^{(30)})_{YM} \end{aligned} \tag{B.6}$$

pri čemu su b_1, b_1^*, $b_{6lm} = b_{6ml}$, $b_{9lm} = b_{9ml}$, $b_{9lm}^* = b_{9ml}^*$, b_{10} i b_{30} realne konstante, a $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_*$, $\mathcal{A}^{(l)}$, $\mathcal{S}^{(l)}$, $\mathcal{S}_*^{(l)}$, $R^{(10)}$ i $R^{(30)}$ definisani u prethodnoj sekciji.

Dokaz ove leme se može naći u [16].

Dodatak C

Bianchijev identitet za tenzor krivine

Koristićemo sljedeće pretpostavke

(i) prostorvrijeme je metrički kompatibilno.

(ii) tenzor krivine ima osobine

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}, \qquad \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0,$$

(iii) skalarna krivina je nula.

Napomena: Za krivinu vrijedi antisimetrija $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$, a zbog metri–čke kompatibilnosti vrijedi i osobina $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$.
Prateći izlaganje u [16], uz korištenje prethodnih uslova, tenzor krivine može–mo zapisati u obliku

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\kappa\mu}Ric_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu}Ric_{\kappa\nu} + g_{\lambda\nu}Ric_{\kappa\mu} - g_{\kappa\nu}Ric_{\lambda\mu}) + \mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu\nu}. \quad \text{(C.1)}$$

Bianchijev identitet za tenzor krivine glasi

$$(\partial_\xi + [\Gamma_\xi, \cdot])R_{\mu\nu} + (\partial_\nu + [\Gamma_\nu, \cdot])R_{\xi\mu} + (\partial_\mu + [\Gamma_\mu, \cdot])R_{\nu\xi} = 0 \quad \text{(C.2)}$$

pri čemu smo sakrili dva indeksa koristeći matričnu notaciju

$$[\Gamma_\xi, R_{\mu\nu}]^\kappa{}_\lambda = \Gamma^\kappa{}_{\xi\eta} R^\eta{}_{\lambda\mu\nu} - R^\kappa{}_{\eta\mu\nu} \Gamma^\eta{}_{\xi\lambda}.$$

Uvrštavajući (C.1) u (C.2), uz uslove $(i) - (iii)$ Bianchijev identitet postaje

$$\partial_\xi \left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\mu Ric_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu} Ric^\kappa{}_\nu + g_{\lambda\nu} Ric^\kappa{}_\mu - \delta^\kappa{}_\nu Ric_{\lambda\mu}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right]$$

$$+\partial_\nu\left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\xi Ric_{\lambda\mu} - g_{\lambda\xi}Ric^\kappa{}_\mu + g_{\lambda\mu}Ric^\kappa{}_\xi - \delta^\kappa{}_\mu Ric_{\lambda\xi}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\xi\mu}\right]$$

$$+\partial_\mu\left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\nu Ric_{\lambda\xi} - g_{\lambda\nu}Ric^\kappa{}_\xi + g_{\lambda\xi}Ric^\kappa{}_\nu - \delta^\kappa{}_\xi Ric_{\lambda\nu}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\nu\xi}\right]$$

$$+\Gamma^\kappa{}_{\nu\eta}\left[\frac{1}{2}(\delta^\eta{}_\xi Ric_{\lambda\mu} - g_{\lambda\xi}Ric^\eta{}_\mu + g_{\lambda\mu}Ric^\eta{}_\xi - \delta^\eta{}_\mu Ric_{\lambda\xi}) + \mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\xi\mu}\right]$$

$$-\Gamma^\eta{}_{\nu\lambda}\left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\xi Ric_{\eta\mu} - g_{\eta\xi}Ric^\kappa{}_\mu + g_{\eta\mu}Ric^\kappa{}_\xi - \delta^\kappa{}_\mu Ric_{\eta\xi}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\xi\mu}\right]$$

$$+\Gamma^\kappa{}_{\xi\eta}\left[\frac{1}{2}(\delta^\eta{}_\mu Ric_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu}Ric^\eta{}_\nu + g_{\lambda\nu}Ric^\eta{}_\mu - \delta^\eta{}_\nu Ric_{\lambda\mu}) + \mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\mu\nu}\right]$$

$$-\Gamma^\eta{}_{\xi\lambda}\left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\mu Ric_{\eta\nu} - g_{\eta\mu}Ric^\kappa{}_\nu + g_{\eta\nu}Ric^\kappa{}_\mu - \delta^\kappa{}_\nu Ric_{\eta\mu}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\mu\nu}\right]$$

$$+\Gamma^\kappa{}_{\mu\eta}\left[\frac{1}{2}(\delta^\eta{}_\nu Ric_{\lambda\xi} - g_{\lambda\nu}Ric^\eta{}_\xi + g_{\lambda\xi}Ric^\eta{}_\nu - \delta^\eta{}_\xi Ric_{\lambda\nu}) + \mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\nu\xi}\right]$$

$$-\Gamma^\eta{}_{\mu\lambda}\left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\nu Ric_{\eta\xi} - g_{\eta\nu}Ric^\kappa{}_\xi + g_{\eta\xi}Ric^\kappa{}_\nu - \delta^\kappa{}_\xi Ric_{\eta\nu}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\nu\xi}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[\delta^\kappa{}_\mu(\nabla_\xi Ric_{\lambda\nu} + \Gamma^\eta{}_{\xi\nu}Ric_{\lambda\eta}) + g_{\lambda\mu}(-\nabla_\xi Ric^\kappa{}_\nu - \Gamma^\eta{}_{\xi\nu}Ric^\kappa{}_\eta)\\
&+g_{\lambda\nu}(\nabla_\xi Ric^\kappa{}_\mu + \Gamma^\eta{}_{\xi\mu}Ric^\kappa{}_\eta) + \delta^\kappa{}_\nu(-\nabla_\xi Ric_{\lambda\mu} - \Gamma^\eta{}_{\xi\mu}Ric_{\lambda\eta})\\
&+\delta^\kappa{}_\xi(\nabla_\nu Ric_{\lambda\mu} + \Gamma^\eta{}_{\nu\mu}Ric_{\lambda\eta}) + \delta^\kappa{}_\mu(-\nabla_\nu Ric_{\lambda\xi} - \Gamma^\eta{}_{\nu\xi}Ric_{\lambda\eta})\\
&+g_{\lambda\mu}(\nabla_\nu Ric^\kappa{}_\xi + \Gamma^\eta{}_{\nu\xi}Ric^\kappa{}_\eta) + g_{\lambda\xi}(-\nabla_\nu Ric^\kappa{}_\mu - \Gamma^\eta{}_{\nu\mu}Ric^\kappa{}_\eta)\\
&+\delta^\kappa{}_\nu(\nabla_\mu Ric_{\lambda\xi} + \Gamma^\eta{}_{\mu\xi}Ric_{\lambda\eta}) + \delta^\kappa{}_\xi(-\nabla_\mu Ric_{\lambda\nu} - \Gamma^\eta{}_{\mu\nu}Ric_{\lambda\eta})\\
&+g_{\lambda\xi}(\nabla_\mu Ric^\kappa{}_\nu + \Gamma^\eta{}_{\mu\nu}Ric^\kappa{}_\eta) + g_{\lambda\nu}(-\nabla_\mu Ric^\kappa{}_\xi - \Gamma^\eta{}_{\mu\xi}Ric^\kappa{}_\eta)\\
&+\Gamma^\kappa{}_{\nu\eta}(\delta^\eta{}_\xi Ric_{\lambda\mu} - \delta^\eta{}_\mu Ric_{\lambda\xi}) + \Gamma^\eta{}_{\nu\lambda}(g_{\eta\xi}Ric^\kappa{}_\mu - g_{\eta\mu}Ric^\kappa{}_\xi)\\
&+\Gamma^\kappa{}_{\xi\eta}(\delta^\eta{}_\mu Ric_{\lambda\nu} - \delta^\eta{}_\nu Ric_{\lambda\mu}) + \Gamma^\eta{}_{\xi\lambda}(g_{\eta\mu}Ric^\kappa{}_\nu - g_{\eta\nu}Ric^\kappa{}_\mu)\\
&+\Gamma^\kappa{}_{\mu\eta}(\delta^\eta{}_\nu Ric_{\lambda\xi} - \delta^\eta{}_\xi Ric_{\lambda\nu}) + \Gamma^\eta{}_{\mu\lambda}(g_{\eta\nu}Ric^\kappa{}_\xi - g_{\eta\xi}Ric^\kappa{}_\nu)]\\
&+\partial_\xi\mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} + \partial_\nu\mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\xi\mu} + \partial_\mu\mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\nu\xi} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\eta}\mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\xi\mu}\\
&-\Gamma^\eta{}_{\nu\lambda}\mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\xi\mu} + \Gamma^\kappa{}_{\xi\eta}\mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\mu\nu} - \Gamma^\eta{}_{\xi\lambda}\mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\mu\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\eta}\mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\nu\xi} - \Gamma^\eta{}_{\mu\lambda}\mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\nu\xi} = 0.
\end{aligned}$$

Posmatrajmo dio koji sadrži Weylovu krivinu $\mathcal{W}$

$$\partial_\xi\mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} + \partial_\nu\mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\xi\mu} + \partial_\mu\mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\nu\xi} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\eta}\mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\xi\mu}$$

$$-\Gamma^\eta{}_{\nu\lambda}\mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\xi\mu} + \Gamma^\kappa{}_{\xi\eta}\mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\mu\nu} - \Gamma^\eta{}_{\xi\lambda}\mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\mu\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\eta}\mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\nu\xi} - \Gamma^\eta{}_{\mu\lambda}\mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\nu\xi}.$$

Kontrakcijom indeksa κ i μ, i koristeći definiciju kovarijanog izvoda Weylovog tenzora, uz kontrakciju,

$$\nabla_\mu \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\xi} = \partial_\mu \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\xi} + \Gamma^\mu{}_{\mu\eta}\mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\nu\xi} - \Gamma^\eta{}_{\mu\lambda}\mathcal{W}^\mu{}_{\eta\nu\xi} - \Gamma^\eta{}_{\mu\nu}\mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\eta\xi} - \Gamma^\eta{}_{\mu\xi}\mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\eta}$$

dobijamo da je taj dio jednak

$$\begin{aligned}
&\nabla_\mu \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\xi}\Gamma^\mu{}_{\nu\eta}\mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\xi\mu} + \Gamma^\mu{}_{\xi\eta}\mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\mu\nu} + \Gamma^\eta{}_{\mu\nu}\mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\eta\xi} + \Gamma^\eta{}_{\mu\xi}\mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\eta} \\
&= \nabla_\mu \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\xi} + \Gamma^\eta{}_{\nu\mu}\mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\xi\eta} + \Gamma^\eta{}_{\xi\mu}\mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\eta\nu} + \Gamma^\eta{}_{\mu\nu}\mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\eta\xi} + \Gamma^\eta{}_{\mu\xi}\mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\eta} \\
&= \nabla_\mu \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\xi} + \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\xi\eta}(\Gamma^\eta{}_{\nu\mu} - \Gamma^\eta{}_{\mu\nu}) + \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\eta}(\Gamma^\eta{}_{\mu\xi} - \Gamma^\eta{}_{\xi\mu}) \\
&= \nabla_\mu \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\xi} + \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\xi\eta}(K^\eta{}_{\nu\mu} - K^\eta{}_{\mu\nu}) + \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\eta}(K^\eta{}_{\mu\xi} - K^\eta{}_{\xi\mu}).
\end{aligned}$$

Ako i u dijelu

$$\delta^\kappa{}_\mu(\nabla_\xi Ric_{\lambda\nu}) + g_{\lambda\mu}(-\nabla_\xi Ric^\kappa{}_\nu) + g_{\lambda\nu}(\nabla_\xi Ric^\kappa{}_\mu) + \delta^\kappa{}_\nu(-\nabla_\xi Ric_{\lambda\mu})$$

$$+\delta^\kappa{}_\xi(\nabla_\nu Ric_{\lambda\mu}) + \delta^\kappa{}_\mu(-\nabla_\nu Ric_{\lambda\xi}) + g_{\lambda\mu}(\nabla_\nu Ric^\kappa{}_\xi) + g_{\lambda\xi}(-\nabla_\nu Ric^\kappa{}_\mu)$$

$$+\delta^\kappa{}_\nu(\nabla_\mu Ric_{\lambda\xi}) + \delta^\kappa{}_\xi(-\nabla_\mu Ric_{\lambda\nu}) + g_{\lambda\xi}(\nabla_\mu Ric^\kappa{}_\nu) + g_{\lambda\nu}(-\nabla_\mu Ric^\kappa{}_\xi)$$

izvršimo kontrakciju između indexa κ i μ, dobijamo

$$4\nabla_\xi Ric_{\lambda\nu} - \nabla_\xi Ric_{\lambda\nu} - \nabla_\xi Ric_{\lambda\nu} + \nabla_\nu Ric_{\lambda\xi} - 4\nabla_\nu Ric_{\lambda\xi} + \nabla_\nu Ric_{\lambda\xi}$$

$$\begin{aligned}
&+\nabla_\nu Ric_{\lambda\xi} - \nabla_\xi Ric_{\lambda\nu} + g_{\lambda\xi}\nabla_\mu Ric^\mu{}_\nu - g_{\lambda\nu}\nabla_\mu Ric^\mu{}_\xi \\
&= \nabla_\xi Ric_{\lambda\nu} - \nabla_\nu Ric_{\lambda\xi} + g_{\lambda\xi}\nabla_\mu Ric^\mu{}_\nu - g_{\lambda\nu}\nabla_\mu Ric^\mu{}_\xi.
\end{aligned}$$

Ostatak identiteta je

$$\frac{1}{2}[\delta^\kappa{}_\mu(\Gamma^\eta{}_{\xi\nu}Ric_{\lambda\eta} - \Gamma^\eta{}_{\nu\xi}Ric_{\lambda\eta}) + g_{\lambda\mu}(\Gamma^\eta{}_{\nu\xi}Ric^\kappa{}_\eta - \Gamma^\eta{}_{\xi\nu}Ric^\kappa{}_\eta)$$

$$+g_{\lambda\nu}(\Gamma^\eta{}_{\xi\mu}Ric^\kappa{}_\eta - \Gamma^\eta{}_{\mu\xi}Ric^\kappa{}_\eta) + \delta^\kappa{}_\nu(\Gamma^\eta{}_{\mu\xi}Ric_{\lambda\eta} - \Gamma^\eta{}_{\xi\mu}Ric_{\lambda\eta})$$

$$+\delta^\kappa{}_\xi(\Gamma^\eta{}_{\nu\mu}Ric_{\lambda\eta} - \Gamma^\eta{}_{\mu\nu}Ric_{\lambda\eta}) + g_{\lambda\xi}(\Gamma^\eta{}_{\mu\nu}Ric^\kappa{}_\eta - \Gamma^\eta{}_{\nu\mu}Ric^\kappa{}_\eta)$$

$$+Ric_{\lambda\mu}(\Gamma^\kappa{}_{\nu\xi} - \Gamma^\kappa{}_{\xi\nu}) + Ric_{\lambda\xi}(\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}) + Ric^\kappa{}_\mu(\Gamma_{\xi\nu\lambda} - \Gamma_{\nu\xi\lambda})$$

$$+Ric^\kappa{}_\xi(\Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda}) + Ric_{\lambda\nu}(\Gamma^\kappa{}_{\xi\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\xi}) + Ric^\kappa{}_\nu(\Gamma_{\mu\xi\lambda} - \Gamma_{\xi\mu\lambda})].$$

Kontrakcijom indeksa κ i μ i regrupisanjem članova, dobijamo:

$$\frac{1}{2}[4Ric_{\lambda\eta}(K^\eta{}_{\xi\nu} - K^\eta{}_{\nu\xi}) + Ric_{\lambda\eta}(K^\eta{}_{\nu\xi} - K^\eta{}_{\xi\nu}) + g_{\lambda\nu}Ric^\mu{}_\eta(K^\eta{}_{\xi\mu} - K^\eta{}_{\mu\xi})$$

$$+Ric_{\lambda\eta}(K^\eta{}_{\nu\xi} - K^\eta{}_{\xi\nu}) + Ric_{\lambda\eta}(K^\eta{}_{\nu\xi} - K^\eta{}_{\xi\nu}) + g_{\lambda\xi}Ric^\mu{}_\eta(K^\eta{}_{\mu\nu} - K^\eta{}_{\nu\mu})$$

$$+Ric_{\lambda\mu}(K^\mu{}_{\nu\xi} - K^\mu{}_{\xi\nu}) + Ric_{\lambda\xi}(K^\mu{}_{\mu\nu} - K^\mu{}_{\nu\mu}) + Ric^\mu{}_\mu(K_{\xi\nu\lambda} - K_{\nu\xi\lambda})$$

$$+Ric^{\mu}{}_{\xi}(K_{\nu\mu\lambda}-K_{\mu\nu\lambda})+Ric_{\lambda\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K_{\mu\xi\lambda}-K_{\xi\mu\lambda})]$$

$$=\frac{1}{2}[Ric_{\lambda\eta}(K^{\eta}{}_{\xi\nu}-K^{\eta}{}_{\nu\xi})+g_{\lambda\nu}Ric^{\mu}{}_{\eta}(K^{\eta}{}_{\xi\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\xi})+g_{\lambda\xi}Ric^{\mu}{}_{\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\nu}-K^{\eta}{}_{\nu\mu})$$

$$+Ric_{\lambda\eta}(K^{\eta}{}_{\nu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\nu})+Ric^{\mu}{}_{\xi}(K_{\nu\mu\lambda}-K_{\mu\nu\lambda})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K_{\mu\xi\lambda}-K_{\xi\mu\lambda})$$

$$+Ric_{\lambda\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+Ric_{\lambda\xi}(K^{\mu}{}_{\mu\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\mu})]$$

$$=\frac{1}{2}[g_{\lambda\nu}Ric^{\mu}{}_{\eta}(K^{\eta}{}_{\xi\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\xi})+g_{\lambda\xi}Ric^{\mu}{}_{\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\nu}-K^{\eta}{}_{\nu\mu})$$

$$+Ric^{\mu}{}_{\xi}(K_{\nu\mu\lambda}-K_{\mu\nu\lambda})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K_{\mu\xi\lambda}-K_{\xi\mu\lambda})$$

$$+Ric_{\lambda\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+Ric_{\lambda\xi}(K^{\mu}{}_{\mu\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\mu})].$$

Sada Bjankijev identitet ima oblik

$$\frac{1}{2}[\nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu}-\nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi}+g_{\lambda\xi}\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu}-g_{\lambda\nu}\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\xi}$$

$$+g_{\lambda\nu}Ric^{\mu}{}_{\eta}(K^{\eta}{}_{\xi\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\xi})+g_{\lambda\xi}Ric^{\mu}{}_{\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\nu}-K^{\eta}{}_{\nu\mu})$$

$$+Ric^{\mu}{}_{\xi}(K_{\nu\mu\lambda}-K_{\mu\nu\lambda})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K_{\mu\xi\lambda}-K_{\xi\mu\lambda})$$

$$+Ric_{\lambda\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+Ric_{\lambda\xi}(K^{\mu}{}_{\mu\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\mu})]$$

$$+\nabla_{\mu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\xi}+\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\xi\eta}(K^{\eta}{}_{\nu\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\nu})+\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\mu})=0$$

a kako je

$$Ric^{\mu}{}_{\eta}K^{\eta}{}_{\xi\mu}=Ric^{\mu}{}_{\eta}K^{\eta}{}_{\nu\mu}=0$$

tada je

$$\frac{1}{2}[\nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu}-\nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi}+g_{\lambda\xi}\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu}-g_{\lambda\nu}\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\xi}$$

$$+Ric^{\mu}{}_{\eta}(g_{\lambda\xi}K^{\eta}{}_{\mu\nu}-g_{\lambda\nu}K^{\eta}{}_{\mu\xi})$$

$$+Ric^{\mu}{}_{\xi}(K_{\nu\mu\lambda}-K_{\mu\nu\lambda})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K_{\mu\xi\lambda}-K_{\xi\mu\lambda})$$

$$+Ric_{\lambda\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+Ric_{\lambda\xi}(K^{\mu}{}_{\mu\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\mu})]$$

$$+\nabla_{\mu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\xi}+\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\xi\eta}(K^{\eta}{}_{\nu\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\nu})+\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\mu})=0. \quad \text{(C.3)}$$

Kontrakcijom indeksa λ i ξ, dobijamo

$$\frac{1}{2}[\nabla_{\xi}Ric^{\xi}{}_{\nu}-\nabla_{\nu}R+4\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu}-\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu}+Ric^{\mu}{}_{\eta}(4K^{\eta}{}_{\mu\nu}-K^{\eta}{}_{\mu\nu})$$

$$-Ric^{\mu}{}_{\xi}(K^{\xi}{}_{\mu\nu}-K^{\xi}{}_{\nu\mu})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K^{\xi}{}_{\mu\xi}-K^{\xi}{}_{\xi\mu})$$

$$+Ric^{\xi}{}_{\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+Ric^{\xi}{}_{\xi}(K^{\mu}{}_{\mu\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\mu})]$$

$$+\mathcal{W}^{\mu\xi}{}_{\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\mu})=0.$$

Dakle

$$2\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu}+Ric^{\mu}{}_{\eta}K^{\eta}{}_{\mu\nu}+Ric^{\xi}{}_{\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+\mathcal{W}^{\mu\xi}{}_{\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\mu})=0$$

pa je

$$\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu}=-\frac{1}{2}Ric^{\mu}{}_{\eta}K^{\eta}{}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Ric^{\xi}{}_{\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})-\frac{1}{2}\mathcal{W}^{\mu\alpha}{}_{\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\alpha}-K^{\eta}{}_{\alpha\mu})$$

$$\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\xi}=-\frac{1}{2}Ric^{\mu}{}_{\eta}K^{\eta}{}_{\mu\xi}-\frac{1}{2}Ric^{\beta}{}_{\xi}(K^{\mu}{}_{\beta\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\beta})-\frac{1}{2}\mathcal{W}^{\mu\alpha}{}_{\xi\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\alpha}-K^{\eta}{}_{\alpha\mu})$$

Uvrštavanjem ovih jednakosti u (C.3), dobijamo

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}[\nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu}-\nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi}+g_{\lambda\xi}(-\frac{1}{2}Ric^{\mu}{}_{\eta}K^{\eta}{}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Ric^{\eta}{}_{\nu}(K^{\mu}{}_{\eta\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\eta})-\\ \frac{1}{2}\mathcal{W}^{\mu\alpha}{}_{\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\alpha}-K^{\eta}{}_{\alpha\mu}))-g_{\lambda\nu}(-\frac{1}{2}Ric^{\mu}{}_{\eta}K^{\eta}{}_{\mu\xi}-\frac{1}{2}Ric^{\beta}{}_{\xi}(K^{\mu}{}_{\beta\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\beta})\\ -\frac{1}{2}\mathcal{W}^{\mu\alpha}{}_{\xi\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\alpha}-K^{\eta}{}_{\alpha\mu}))+Ric^{\mu}{}_{\eta}(g_{\lambda\xi}K^{\eta}{}_{\mu\nu}-g_{\lambda\nu}K^{\eta}{}_{\mu\xi})\\ +Ric^{\mu}{}_{\xi}(K_{\nu\mu\lambda}-K_{\mu\nu\lambda})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K_{\mu\xi\lambda}-K_{\xi\mu\lambda})\\ +Ric_{\lambda\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+Ric_{\lambda\xi}(K^{\mu}{}_{\mu\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\mu})]\\ +\nabla_{\mu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\xi}+\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\xi\eta}(K^{\eta}{}_{\nu\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\nu})+\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\mu})=0\end{gathered}$$

odnosno

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}[\nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu}-\nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi}+\frac{1}{2}Ric^{\mu}{}_{\eta}(g_{\lambda\nu}K^{\eta}{}_{\mu\xi}-g_{\lambda\xi}K^{\eta}{}_{\mu\nu})+Ric^{\mu}{}_{\eta}(g_{\lambda\xi}K^{\eta}{}_{\mu\nu}-g_{\lambda\nu}K^{\eta}{}_{\mu\xi})\\ -\frac{1}{2}g_{\lambda\xi}Ric^{\eta}{}_{\nu}(K^{\mu}{}_{\eta\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\eta})+\frac{1}{2}g_{\lambda\nu}Ric^{\beta}{}_{\xi}(K^{\mu}{}_{\beta\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\beta})\\ +Ric^{\mu}{}_{\xi}(K_{\nu\mu\lambda}-K_{\mu\nu\lambda})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K_{\mu\xi\lambda}-K_{\xi\mu\lambda})\\ +Ric_{\lambda\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+Ric_{\lambda\xi}(K^{\mu}{}_{\mu\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\mu})]\\ +\frac{1}{4}g_{\lambda\xi}\mathcal{W}^{\mu\alpha}{}_{\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\alpha\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\alpha})-\frac{1}{4}g_{\lambda\nu}\mathcal{W}^{\mu\alpha}{}_{\xi\eta}(K^{\eta}{}_{\alpha\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\alpha})\\ +\nabla_{\mu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\xi}+\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\xi\eta}(K^{\eta}{}_{\nu\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\nu})+\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\mu})=0\end{gathered}$$

odakle je

$$\nabla_{\mu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\xi}=\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\xi\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\nu}-K^{\eta}{}_{\nu\mu})+\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\xi\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\xi})$$

$$+\frac{1}{4}(K^{\eta}{}_{\alpha\mu} - K^{\eta}{}_{\mu\alpha})(g_{\lambda\nu}\mathcal{W}^{\mu\alpha}{}_{\xi\eta} - g_{\lambda\xi}\mathcal{W}^{\mu\alpha}{}_{\nu\eta})$$

$$+\frac{1}{2}[\nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi} - \nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu} + Ric^{\mu}{}_{\xi}(K_{\mu\nu\lambda} - K_{\nu\mu\lambda}) + Ric^{\mu}{}_{\nu}(K_{\xi\mu\lambda} - K_{\mu\xi\lambda})$$

$$+Ric_{\lambda\nu}(K^{\mu}{}_{\mu\xi} - K^{\mu}{}_{\xi\mu}) + Ric_{\lambda\xi}(K^{\mu}{}_{\nu\mu} - K^{\mu}{}_{\mu\nu})$$

$$+\frac{1}{2}Ric^{\mu}{}_{\eta}(g_{\lambda\nu}K^{\eta}{}_{\mu\xi} - g_{\lambda\xi}K^{\eta}{}_{\mu\nu})$$

$$+\frac{1}{2}(K^{\mu}{}_{\mu\eta} - K^{\mu}{}_{\eta\mu})(g_{\lambda\nu}Ric^{\eta}{}_{\xi} - g_{\lambda\xi}Ric^{\eta}{}_{\nu})].$$

Preimenovanjem nekih indeksa dobijamo jednakost

$$\begin{aligned}
\nabla_{\eta}\mathcal{W}^{\eta}{}_{\mu\lambda\kappa} &= \mathcal{W}^{\eta}{}_{\mu\kappa\xi}(K^{\xi}{}_{\eta\lambda} - K^{\xi}{}_{\lambda\eta}) + \mathcal{W}^{\eta}{}_{\mu\lambda\xi}(K^{\xi}{}_{\kappa\eta} - K^{\xi}{}_{\eta\kappa}) \\
&+ \frac{1}{4}(K^{\xi}{}_{\zeta\eta} - K^{\xi}{}_{\eta\zeta})(g_{\mu\lambda}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\kappa\xi} - g_{\mu\kappa}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\lambda\xi}) \\
&+ \frac{1}{2}[\nabla_{\lambda}Ric_{\mu\kappa} - \nabla_{\kappa}Ric_{\mu\lambda} + Ric^{\eta}{}_{\kappa}(K_{\eta\lambda\mu} - K_{\lambda\eta\mu}) \\
&+ Ric^{\eta}{}_{\lambda}(K_{\kappa\eta\mu} - K_{\eta\kappa\mu}) + Ric_{\mu\lambda}(K^{\eta}{}_{\eta\kappa} - K^{\eta}{}_{\kappa\eta}) \\
&+ Ric_{\mu\kappa}(K^{\eta}{}_{\lambda\eta} - K^{\eta}{}_{\eta\lambda})] + \frac{1}{4}Ric^{\eta}{}_{\xi}(g_{\mu\lambda}K^{\xi}{}_{\eta\kappa} - g_{\mu\kappa}K^{\xi}{}_{\eta\lambda}) \\
&+ \frac{1}{4}(K^{\eta}{}_{\eta\xi} - K^{\eta}{}_{\xi\eta})(g_{\mu\lambda}Ric^{\xi}{}_{\kappa} - g_{\mu\kappa}Ric^{\xi}{}_{\lambda}).
\end{aligned} \tag{C.4}$$

koja je identična jednakosti (4.19).

Dodatak D

Varijacije nekih kvadratnih formi

U ovom dijelu detaljno ćemo izračunati varijacije nekih kvadratnih formi kojima smo se koristili u ovom radu, prateći izlaganje u [16]. Pri tome ćemo koristiti sljedeću propoziciju:

Propozicija D.0.1 *Neka je (M, g) (ne) Riemannova mnogostrukost. Pri varijaciji $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, vrijedi*

(i) $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} \delta g_{\kappa\lambda}$,

(ii) $\delta \det g_{\mu\nu} = \det g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$,

(iii) $\delta \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} = \frac{1}{2} \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$.

D.1 Varijacija od $\int \mathcal{R}$

D.1.1 Varijacija po metrici

Pomoći ove varijacije dobijamo Einsteinovu vakuumsku jednačinu. Budući da je $\mathcal{R} = R^{\kappa\mu}{}_{\kappa\mu}$, tada je

$$\begin{aligned}
\delta \int \mathcal{R} &= \delta \int R^{\kappa\mu}{}_{\kappa\mu} \sqrt{|\det g|} = \delta \int R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} g^{\lambda\mu} \sqrt{|\det g|} \\
&= \int \delta \left(R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} g^{\lambda\mu} \sqrt{|\det g|} \right) = \int R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} \delta \left(g^{\lambda\mu} \sqrt{|\det g|} \right) \\
&= \int R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} \delta \left(-g^{\lambda\alpha} g^{\beta\mu} \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{|\det g|} + g^{\lambda\mu} \frac{1}{2} \sqrt{|\det g|} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right) \\
&= \int (\delta g_{\alpha\beta}) \left(-R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} g^{\lambda\alpha} g^{\beta\mu} + \frac{1}{2} R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} g^{\lambda\mu} \sqrt{|\det g|} g^{\alpha\beta} \right).
\end{aligned}$$

Odavdje je

$$\delta\int\mathcal{R} \;=\; \int(\delta g_{\alpha\beta})\left(-R^{\kappa\alpha}{}_{\kappa}{}^{\beta}+\frac{1}{2}\mathcal{R}g^{\alpha\beta}\right)=\int(\delta g_{\alpha\beta})\left(-Ric^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\mathcal{R}g^{\alpha\beta}\right).$$

Prema tome, Einsteinova vakuumska jednačina ima oblik

$$Ric^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\mathcal{R}g^{\alpha\beta}=0. \tag{D.1}$$

D.2 Varijacija od $\int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}$

D.2.1 Varijacija po metrici

Varijacijom po metrici ove kvadratne forme dobijamo komplementarnu Yang–Millsovu jednačinu za afinu konekciju. Imamo

$$\begin{aligned}
\delta\int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} &= \delta\int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\\
&= \int\delta\left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa\mu'\nu'}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|}\right)\\
&= \int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa\mu'\nu'}\delta\left(g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|}\right)\\
&= \int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa\mu'\nu'}\left(\delta g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|}\right.\\
&+ \left. g^{\mu\mu'}\delta g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|}+g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}\delta\sqrt{|\det g|}\right).
\end{aligned}$$

Koristeći Propoziciju D.0.1, dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta\int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} &= \int(\delta g_{\alpha\beta})R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa\mu'\nu'}\left(-g^{\mu\alpha}g^{\beta\mu'}g^{\nu\nu'}-g^{\nu\alpha}g^{\beta\nu'}g^{\mu\mu'}\right.\\
&+ \left.\frac{1}{2}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}g^{\alpha\beta}\right)\\
&= -\int(\delta g_{\alpha\beta})\left(R^{\kappa}{}_{\lambda\nu}{}^{\alpha}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\nu\beta}+R^{\kappa}{}_{\lambda\mu}{}^{\alpha}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\beta}\right.\\
&- \left.\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\right)\\
&= -\int(\delta g_{\alpha\beta})\left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu}{}^{\alpha}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\beta}+R^{\kappa}{}_{\lambda\mu}{}^{\alpha}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\beta}\right.\\
&- \left.\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\right)
\end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$\delta\int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} = -2\int(\delta g_{\alpha\beta})\left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu}{}^{\alpha}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\beta} - \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\right) \quad \text{(D.2)}$$

pa komplementarna Yang-Millsova jednačina ima oblik

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\mu}{}^{\alpha}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\beta} - \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} = 0. \quad \text{(D.3)}$$

Uvodeći oznake $H = H_{\alpha}{}^{\beta} = R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\alpha}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\beta}$ i $\delta = \delta_{\alpha}{}^{\beta}$ jednačinu (D.3) možemo zapisati u obliku

$$H - \frac{1}{4}(\mathrm{tr}H)\delta = 0. \quad \text{(D.4)}$$

D.2.2 Varijacija po konekciji

Rezultat ove varijacije je dobro poznat i može se naći na primjer u [23]. Vari– jacijom ove akcije po konekciji dobijamo Yang-Millsovu jednačinu za afinu konekciju. Budući da variramo krivinu nezavisno, koristićemo se činjenicom da je

$$\begin{aligned}
\delta\int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} &= \int\delta\left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\right)\sqrt{|\det g|} \\
&= \int\delta\left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}\right)R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|} \\
&+ \int\delta\left(R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\right)R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}\sqrt{|\det g|} \\
&= \int\delta\left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}\right)R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|} \\
&+ \int\delta\left(R^{\lambda}{}_{\kappa\mu\nu}\right)R^{\kappa}{}_{\lambda}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|} \\
&= \int\delta\left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}\right)R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|} \\
&+ \int\delta\left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}\right)R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|} \\
&= 2\int\delta\left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}\right)R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}. \qquad \text{(D.5)}
\end{aligned}$$

Na osnovu definicije tenzora krivine (2.31), dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} &= \partial_{\mu}\left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda}\right) - \partial_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right) \\
&+ \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta}\right)\Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta}\delta\Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda} - \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}\right)\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}\delta\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}.
\end{aligned} \quad \text{(D.6)}$$

Uvrštavajući jednakost (D.6) u jednačinu (D.5)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta\int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} &= -\int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda})\,\partial_\mu\left(R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\right)\frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}}\\
&+ \int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)\partial_\nu\left(R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\right)\frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}}\\
&+ \int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta}\right)\Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\\
&+ \int \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta}\,(\delta\Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda})\,R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\\
&- \int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}\right)\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\\
&- \int \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}\left(\delta\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}\right)R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}.
\end{aligned}
$$

Koristeći činjenicu da za tenzor krivine vrijedi antisimetrija $R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = -R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$, preimenovanjem indeksa, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta\int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} &= \int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)\partial_\nu\left(R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\right)\frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}}\\
&+ \int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)\partial_\nu\left(R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\right)\frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}}\\
&+ \int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}R^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\\
&- \int \Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa}\left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)R^{\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\\
&+ \int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}R^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\\
&- \int \Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa}\left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)R^{\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|},
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta\int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} &= 2\int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)\partial_\nu\left(R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\right)\frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}}\\
&+ 2\int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}R^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\\
&- 2\int \Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa}\left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)R^{\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}.
\end{aligned}
$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
\delta \int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} &= 4 \int \left(\delta \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right) \partial_{\nu} \left(R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} \sqrt{|\det g|}\right) \frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}} \\
&+ 4 \int \left(\delta \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right) \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta} R^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa} R^{\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu}\right) \sqrt{|\det g|} \\
&= 4 \int \left(\delta \Gamma_{\mu}\right) \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \left(\partial_{\nu} + [\Gamma_{\nu}, \cdot]\right) \left(\sqrt{|\det g|} R^{\mu\nu}\right) \sqrt{|\det g|}.
\end{aligned}
$$

Koristeći se činjenicom da je Yang-Millsova divergencija definisana sa

$$
(\delta_{\mathrm{YM}} R)^{\mu} := \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \left(\partial_{\nu} + [\Gamma_{\nu}\,,\,\cdot\,]\right) \left(\sqrt{|\det g|}\, R^{\mu\nu}\right) \tag{D.7}
$$

dobijamo da je

$$
\delta \int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} = 4 \int \left(\left(\delta_{\mathrm{YM}} R^{\mu\nu}\right) \, (\delta \Gamma)_{\mu} \right). \tag{D.8}
$$

D.3 Varijacija od $\int Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu}$

D.3.1 Varijacija po metrici

Budući da je

$$
\delta \int Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} = \int \delta \left(Ric_{\mu\nu} Ric_{\mu'\nu'} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|} \right),
$$

tada je

$$
\begin{aligned}
\delta \int Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} &= \int Ric_{\mu\nu} Ric_{\mu'\nu'} \left(\sqrt{|\det g|}\right) \Big[\left(\delta g^{\mu\mu'}\right) g^{\nu\nu'} + g^{\mu\mu'} \left(\delta g^{\nu\nu'}\right) \\
&+ \frac{1}{2} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\alpha\beta} \left(\delta g_{\alpha\beta}\right) \Big] \\
&= \int Ric_{\mu\nu} Ric_{\mu'\nu'} \left(\delta g_{\alpha\beta}\right) \Big[-g^{\nu\nu'} g^{\mu\alpha} g^{\beta\mu'} - g^{\mu\mu'} g^{\nu\alpha} g^{\beta\nu'} \\
&+ \frac{1}{2} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\alpha\beta} \Big] \\
&= \int \left(\delta g_{\alpha\beta}\right) \left(-Ric^{\alpha}{}_{\nu} Ric^{\beta\nu} - Ric_{\mu}{}^{\alpha} Ric^{\mu\beta} + \frac{1}{2} Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right)
\end{aligned}
$$

odakle dobijamo

$$
\begin{aligned}
\delta\int Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu} &= \int(\delta g_{\alpha\beta})\big(-Ric^{\alpha}{}_{\nu}Ric^{\beta\nu}-Ric_{\mu}{}^{\alpha}Ric^{\mu\beta}\\
&+ \frac{1}{2}Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\Big)\\
&= -2\int(\delta g_{\alpha\beta})\left(Ric_{\mu}{}^{\alpha}Ric^{\mu\beta}-\frac{1}{4}Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right).
\end{aligned}
\tag{D.9}
$$

D.3.2 Varijacija po konekciji

Na osnovu jednačine (D.6) i činjenice da je $Ric_{\mu\nu}=R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu}$, dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
\delta Ric_{\mu\nu} &= \partial_{\kappa}\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\mu}-\delta^{\lambda}{}_{\kappa}\partial_{\nu}\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\mu}\\
&+ \delta^{\lambda}{}_{\kappa}(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\eta})\Gamma^{\eta}{}_{\nu\mu}+\Gamma^{\kappa}{}_{\kappa\eta}\delta\Gamma^{\eta}{}_{\nu\mu}-(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta})\Gamma^{\eta}{}_{\kappa\mu}-\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}\delta\Gamma^{\eta}{}_{\kappa\mu}.
\end{aligned}
\tag{D.10}
$$

Također, vrijedi

$$
\begin{aligned}
\delta\int Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu} &= \int(\delta Ric_{\mu\nu})\,Ric^{\mu\nu}+\int Ric_{\mu\nu}\,(\delta Ric^{\mu\nu})\\
&= \int(\delta Ric_{\mu\nu})\,Ric^{\mu\nu}+\int Ric_{\mu\nu}\,(\delta Ric_{\mu'\nu'})\,g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}\\
&= \int(\delta Ric_{\mu\nu})\,Ric^{\mu\nu}+\int Ric^{\mu'\nu'}\,(\delta Ric_{\mu'\nu'})\\
&= \int(\delta Ric_{\mu\nu})\,Ric^{\mu\nu}+\int Ric^{\mu\nu}\,(\delta Ric_{\mu\nu})\\
&= 2\int(\delta Ric_{\mu\nu})\,Ric^{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{D.11}
$$

Uvrštavajući formulu (D.10) u (D.11), dobijamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta \int Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} &= -\int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\mu})\, \partial_\kappa \left(\sqrt{|\det g|} Ric^{\mu\nu}\right) \frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}} \\
&+ \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\mu})\, \delta^{\lambda}{}_{\kappa} \partial_\nu \left(\sqrt{|\det g|} Ric^{\mu\nu}\right) \frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}} \\
&+ \int \left[\delta^{\lambda}{}_{\kappa} (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\eta}) \Gamma^{\eta}{}_{\nu\mu} + \Gamma^{\kappa}{}_{\kappa\eta} \delta\Gamma^{\eta}{}_{\nu\mu}\right. \\
&- \left.(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}) \Gamma^{\eta}{}_{\kappa\mu} - \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta} \delta\Gamma^{\eta}{}_{\kappa\mu}\right] Ric^{\mu\nu} \sqrt{|\det g|} \\
&= \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\mu}) \Big[\Big(-\partial_\kappa \left(\sqrt{|\det g|} Ric^{\mu\nu}\right) \\
&+ \delta^{\nu}{}_{\kappa} \partial_\lambda \left(\sqrt{|\det g|} Ric^{\mu\lambda}\right)\Big) \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \\
&+ \delta^{\nu}{}_{\kappa} \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\eta} Ric^{\eta\lambda} + \Gamma^{\eta}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\nu} \\
&- \Gamma^{\mu}{}_{\kappa\eta} Ric^{\eta\nu} - \Gamma^{\nu}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\eta}\Big] \sqrt{|\det g|},
\end{aligned}
$$

Koristeći jednakosti $\Gamma = \{\Gamma\} + K$ i

$$
\{\Gamma\}^{\alpha}{}_{\beta\alpha} = \frac{\partial_\beta |\det g|}{2|\det g|}, \tag{D.12}
$$

dobijamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta \int Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} &= \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\mu}) \left[-\partial_\kappa Ric^{\mu\nu} - \{\Gamma\}^{\eta}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\nu}\right. \\
&+ \delta^{\nu}{}_{\kappa} \partial_\lambda Ric^{\mu\lambda} + \delta^{\nu}{}_{\kappa} \{\Gamma\}^{\eta}{}_{\eta\lambda} Ric^{\mu\lambda} \\
&+ \delta^{\nu}{}_{\kappa} (\{\Gamma\}^{\mu}{}_{\lambda\eta} Ric^{\eta\lambda} + K^{\mu}{}_{\lambda\eta} Ric^{\eta\lambda}) + \{\Gamma\}^{\eta}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\nu} + K^{\eta}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\nu} \\
&- \{\Gamma\}^{\mu}{}_{\kappa\eta} Ric^{\eta\nu} - K^{\mu}{}_{\kappa\eta} Ric^{\eta\nu} - \{\Gamma\}^{\nu}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\eta} - K^{\nu}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\eta} \\
&+ \left.\delta^{\nu}{}_{\kappa} \left(\{\Gamma\}^{\lambda}{}_{\lambda\eta} Ric^{\mu\eta} - \{\Gamma\}^{\lambda}{}_{\lambda\eta} Ric^{\mu\eta}\right)\right] \\
&= \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\mu}) \left[-\left(\partial_\kappa Ric^{\mu\nu} + \{\Gamma\}^{\mu}{}_{\kappa\eta} Ric^{\eta\nu} + \{\Gamma\}^{\nu}{}_{\kappa\eta} Ric^{\mu\eta}\right)\right. \\
&+ \delta^{\nu}{}_{\kappa} \left(\partial_\lambda Ric^{\mu\lambda} + \{\Gamma\}^{\mu}{}_{\lambda\eta} Ric^{\eta\lambda} + \{\Gamma\}^{\lambda}{}_{\lambda\eta} Ric^{\mu\eta}\right) \\
&+ \left.\delta^{\nu}{}_{\kappa} K^{\mu}{}_{\lambda\eta} Ric^{\eta\lambda} + K^{\eta}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\nu} - K^{\mu}{}_{\kappa\eta} Ric^{\eta\nu} - K^{\nu}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\eta}\right] \\
&= \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\mu}) \left[-\{\nabla\}_\kappa Ric^{\mu\nu} + \delta^{\nu}{}_{\kappa} \{\nabla\}_\lambda Ric^{\mu\lambda}\right. \\
&+ \left.\delta^{\nu}{}_{\kappa} K^{\mu}{}_{\lambda\eta} Ric^{\eta\lambda} + K^{\eta}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\nu} - K^{\mu}{}_{\kappa\eta} Ric^{\eta\nu} - K^{\nu}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\eta}\right]
\end{aligned}
$$

sa Levi-Civita konekcijom. Sa punom konekcijom, vrijedi

$$\begin{aligned}
\delta \int Ric_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} &= 2\int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\mu}) \big[-\nabla_{\kappa} Ric^{\mu\nu} + \delta^{\nu}{}_{\kappa} \nabla_{\lambda} Ric^{\mu\lambda} \\
&+ K^{\nu}{}_{\kappa\eta} Ric^{\mu\eta} - \delta^{\nu}{}_{\kappa} K^{\lambda}{}_{\lambda\eta} Ric^{\mu\eta} + K^{\eta}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\nu} - K^{\nu}{}_{\eta\kappa} Ric^{\mu\eta}\big] .
\end{aligned}$$

D.4 Varijacija od $\int Ric^{(2)}_{\mu\nu} Ric_{\mu\nu}$

D.4.1 Varijacija po metrici

Koristeći Propoziciju D.0.1, dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta \int Ric^{(2)\kappa}{}_{\nu} Ric_{\kappa}{}^{\nu} &= \delta \int R^{\kappa\lambda}{}_{\lambda\nu} R^{\mu}{}_{\kappa\mu}{}^{\nu} \sqrt{|\det g|} \\
&= \delta \int R^{\kappa}{}_{\lambda'\lambda\nu} R^{\mu}{}_{\kappa\mu\nu'} g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\nu'} \sqrt{|\det g|} \\
&= \int R^{\kappa}{}_{\lambda'\lambda\nu} R^{\mu}{}_{\kappa\mu\nu'} \Big((\delta g^{\lambda\lambda'}) g^{\nu\nu'} \sqrt{|\det g|} \\
&+ g^{\lambda\lambda'} \delta(g^{\nu\nu'}) \sqrt{|\det g|} + g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\nu'} \delta(\sqrt{|\det g|}) \Big) \\
&= \int (\delta g_{\alpha\beta}) R^{\kappa}{}_{\lambda'\lambda\nu} R^{\mu}{}_{\kappa\mu\nu'} \Big(-g^{\lambda\alpha} g^{\beta\lambda'} g^{\nu\nu'} \sqrt{|\det g|} \\
&- g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\alpha} g^{\beta\nu'} \sqrt{|\det g|} + \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\nu'} g^{\alpha\beta} \sqrt{|\det g|} \Big) .
\end{aligned}$$

Odavdje je

$$\begin{aligned}
\delta \int Ric^{(2)\kappa}{}_{\nu} Ric_{\kappa}{}^{\nu} &= \int (\delta g_{\alpha\beta}) \Big(-R^{\kappa\alpha\beta}{}_{\nu} Ric_{\kappa}{}^{\nu} - Ric^{(2)\kappa\alpha} Ric_{\kappa}{}^{\beta} \\
&+ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} Ric^{(2)\kappa}{}_{\nu} Ric_{\kappa}{}^{\nu} \Big) .
\end{aligned} \tag{D.13}$$

D.4.2 Varijacija po konekciji

Budući da je

$$\delta Ric^{(2)\kappa}{}_{\nu} = \delta R^{\kappa}{}_{\lambda}{}^{\lambda}{}_{\nu} = g^{\lambda\mu} \delta R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}$$

tada je

$$
\begin{aligned}
\int \left(\delta Ric^{(2)}{}_{\mu\nu}\right) Ric^{\mu\nu} &= \int \left(\delta Ric^{(2)\kappa}{}_{\nu}\right) Ric_{\kappa}{}^{\nu} \\
&= \int \frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}} \left(\delta \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda}\right) \\
& \quad \partial_{\mu}\left[\sqrt{|\det g|}\left(-g^{\lambda\mu} Ric_{\kappa}{}^{\nu} + g^{\lambda\nu} Ric_{\kappa}{}^{\mu}\right)\right] \\
&+ \int \left(\delta \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}\right)\left(g^{\lambda\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda} Ric_{\kappa}{}^{\mu} - g^{\lambda\mu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda} Ric_{\kappa}{}^{\nu}\right)\sqrt{|\det g|} \\
&+ \int \left(\delta \Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda}\right)\left(g^{\lambda\mu}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta} Ric_{\kappa}{}^{\nu} - g^{\lambda\nu}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta} Ric_{\kappa}{}^{\mu}\right)\sqrt{|\det g|} \\
&= \int (\delta \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda}) \\
& \Big\{ \quad \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\partial_{\mu}\left[\sqrt{|\det g|}(-g^{\lambda\mu} Ric_{\kappa}{}^{\nu} + g^{\lambda\nu} Ric_{\kappa}{}^{\mu})\right] \\
&+ g^{\eta\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\eta} Ric_{\kappa}{}^{\mu} - g^{\eta\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\eta} Ric_{\kappa}{}^{\nu} \\
&+ g^{\lambda\mu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa} Ric_{\eta}{}^{\nu} - g^{\lambda\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa} Ric_{\eta}{}^{\mu}\Big\} \\
&= \int (\delta \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda})\Big\{\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}[-g^{\lambda\mu}\partial_{\mu}(\sqrt{|\det g|} Ric_{\kappa}{}^{\nu}) \\
&+ g^{\lambda\nu}\partial_{\mu}(\sqrt{|\det g|} Ric_{\kappa}{}^{\mu})] \\
&- \partial_{\mu} g^{\lambda\mu} Ric_{\kappa}{}^{\nu} + \partial_{\mu} g^{\lambda\nu} Ric_{\kappa}{}^{\mu} + g^{\eta\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\eta} Ric_{\kappa}{}^{\mu} \\
&- g^{\eta\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\eta} Ric_{\kappa}{}^{\nu} + g^{\lambda\mu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa} Ric_{\eta}{}^{\nu} - g^{\lambda\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa} Ric_{\eta}{}^{\mu}\Big\} \\
&= \int (\delta \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda})\Big\{\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}[-g^{\lambda\mu}\partial_{\mu}(\sqrt{|\det g|} Ric_{\kappa}{}^{\nu}) \\
&+ g^{\lambda\nu}\partial_{\mu}(\sqrt{|\det g|} Ric_{\kappa}{}^{\mu})] \\
&- (\nabla_{\mu} g)^{\lambda\mu} Ric_{\kappa}{}^{\nu} + (\nabla_{\mu} g)^{\lambda\nu} Ric_{\kappa}{}^{\mu} \\
&+ g^{\lambda\eta}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\eta} Ric_{\kappa}{}^{\nu} - g^{\lambda\eta}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\eta} Ric_{\kappa}{}^{\mu} \\
&+ g^{\lambda\mu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa} Ric_{\eta}{}^{\nu} - g^{\lambda\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa} Ric_{\eta}{}^{\mu}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Budući da je

$$
\{\Gamma\}^{\xi}{}_{\nu\xi} = \frac{\partial_{\nu}|\det g|}{2|\det g|}
$$

dobijamo

$$
\begin{aligned}
\int \left(\delta Ric^{(2)}{}_{\mu\nu}\right) Ric^{\mu\nu} &= \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda})\Big[-g^{\lambda\mu}\frac{\partial_\mu|\det g|}{2|\det g|}Ric_{\kappa}{}^{\nu} - g^{\lambda\mu}\partial_\mu Ric_{\kappa}{}^{\nu} \\
&+ g^{\lambda\nu}\frac{\partial_\mu|\det g|}{2|\det g|}Ric_{\kappa}{}^{\mu} + g^{\lambda\nu}\partial_\mu Ric_{\kappa}{}^{\mu} - (\nabla_\mu g)^{\lambda\mu}Ric_{\kappa}{}^{\nu} \\
&+ (\nabla_\mu g)^{\lambda\nu}Ric_{\kappa}{}^{\mu} + g^{\lambda\eta}\frac{\partial_\eta|\det g|}{2|\det g|}Ric_{\kappa}{}^{\nu} + g^{\lambda\eta}K^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\nu} \\
&- g^{\lambda\eta}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\mu} + g^{\lambda\mu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\nu} - g^{\lambda\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\mu}\Big] \\
&= \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda})\Big[-g^{\lambda\mu}\partial_\mu Ric_{\kappa}{}^{\nu} - g^{\lambda\mu}\Gamma^{\nu}{}_{\eta\mu}Ric_{\kappa}{}^{\eta} + g^{\lambda\mu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\nu} \\
&+ g^{\lambda\nu}\frac{\partial_\mu|\det g|}{2|\det g|}Ric_{\kappa}{}^{\mu} + g^{\lambda\nu}\partial_\mu Ric_{\kappa}{}^{\mu} - (\nabla_\mu g)^{\lambda\mu}Ric_{\kappa}{}^{\nu} \\
&+ (\nabla_\mu g)^{\lambda\nu}Ric_{\kappa}{}^{\mu} + g^{\lambda\eta}K^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\nu} - g^{\lambda\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\mu}\Big] \\
&= \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda})\Big[-g^{\lambda\mu}(\{\nabla\}_\mu Ric)_{\kappa}{}^{\nu} + g^{\lambda\nu}\frac{\partial_\mu|\det g|}{2|\det g|}Ric_{\kappa}{}^{\mu} \\
&+ g^{\lambda\nu}\partial_\mu Ric_{\kappa}{}^{\mu} - (\nabla_\mu g)^{\lambda\mu}Ric_{\kappa}{}^{\nu} + (\nabla_\mu g)^{\lambda\nu}Ric_{\kappa}{}^{\mu} \\
&- g^{\lambda\mu}K^{\nu}{}_{\eta\mu}Ric_{\kappa}{}^{\eta} + g^{\lambda\mu}K^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\nu} + g^{\lambda\eta}K^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\nu} \\
&- g^{\lambda\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\mu} + g^{\lambda\nu}\{\Gamma\}^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\eta} - g^{\lambda\nu}\{\Gamma\}^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\eta}\Big] \\
&= \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda})\Big[-g^{\lambda\mu}(\{\nabla\}_\mu Ric)_{\kappa}{}^{\nu} + g^{\lambda\nu}\frac{\partial_\mu|\det g|}{2|\det g|}Ric_{\kappa}{}^{\mu} \\
&+ g^{\lambda\nu}(\partial_\mu Ric_{\kappa}{}^{\mu} + \{\Gamma\}^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\eta} - \{\Gamma\}^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\mu}) \\
&- (\nabla_\mu g)^{\lambda\mu}Ric_{\kappa}{}^{\nu} + (\nabla_\mu g)^{\lambda\nu}Ric_{\kappa}{}^{\mu} \\
&- g^{\lambda\mu}K^{\nu}{}_{\eta\mu}Ric_{\kappa}{}^{\eta} + g^{\lambda\mu}K^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\nu} \\
&+ g^{\lambda\eta}K^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\nu} - g^{\lambda\nu}K^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\mu} - g^{\lambda\nu}\{\Gamma\}^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\eta}\Big] \\
&= \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda})\Big[-g^{\lambda\mu}(\{\nabla\}_\mu Ric)_{\kappa}{}^{\nu} + g^{\lambda\nu}\frac{\partial_\mu|\det g|}{2|\det g|}Ric_{\kappa}{}^{\mu} \\
&+ g^{\lambda\nu}(\{\nabla\}_\mu Ric)_{\kappa}{}^{\mu} - (\nabla_\mu g)^{\lambda\mu}Ric_{\kappa}{}^{\nu} + (\nabla_\mu g)^{\lambda\nu}Ric_{\kappa}{}^{\mu} \\
&- g^{\lambda\mu}K^{\nu}{}_{\eta\mu}Ric_{\kappa}{}^{\eta} + g^{\lambda\mu}K^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\nu} + g^{\lambda\eta}K^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\nu} \\
&- g^{\lambda\nu}K^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\mu} - g^{\lambda\nu}\frac{\partial_\eta|\det g|}{2|\det g|}Ric_{\kappa}{}^{\eta}\Big].
\end{aligned}
$$

Odavdje je

$$\begin{aligned}\int \left(\delta Ric^{(2)}{}_{\mu\nu}\right) Ric^{\mu\nu} &= \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda})\Big[-g^{\lambda\mu}(\{\nabla\}_{\mu}Ric)_{\kappa}{}^{\nu} + g^{\lambda\nu}(\{\nabla\}_{\mu}Ric)_{\kappa}{}^{\mu} \\ &- (\nabla_{\mu}g)^{\lambda\mu}Ric_{\kappa}{}^{\nu} + (\nabla_{\mu}g)^{\lambda\nu}Ric_{\kappa}{}^{\mu} - g^{\lambda\mu}K^{\nu}{}_{\eta\mu}Ric_{\kappa}{}^{\eta} \\ &+ g^{\lambda\mu}K^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\nu} + g^{\lambda\eta}K^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\nu} - g^{\lambda\nu}K^{\eta}{}_{\mu\kappa}Ric_{\eta}{}^{\mu}\Big],\end{aligned}$$

sa Levi-Civita konekcijom. Koristeći punu konekciju, dobijamo

$$\begin{aligned}\int \left(\delta Ric^{(2)}{}_{\mu\nu}\right) Ric^{\mu\nu} &= \int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda})\Big[-g^{\lambda\mu}(\nabla_{\mu}Ric)_{\kappa}{}^{\nu} + g^{\lambda\nu}(\nabla_{\mu}Ric)_{\kappa}{}^{\mu} \\ &- (\nabla_{\mu}g)^{\lambda\mu}Ric_{\kappa}{}^{\nu} + (\nabla_{\mu}g)^{\lambda\nu}Ric_{\kappa}{}^{\mu} - g^{\lambda\mu}K^{\nu}{}_{\eta\mu}Ric_{\kappa}{}^{\eta} \\ &+ g^{\lambda\eta}K^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\nu} + g^{\lambda\mu}K^{\nu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\eta} - g^{\lambda\nu}K^{\mu}{}_{\mu\eta}Ric_{\kappa}{}^{\eta}].\end{aligned} \tag{D.14}$$

D.5 Varijacija od $\int Ric^{(2)}_{\mu\nu} Ric^{(2)\mu\nu}$

D.5.1 Varijacija po metrici

Budući da je $Ric^{(2)}_{\kappa\nu} = R_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\mu\nu}$, imamo

$$\begin{aligned}\delta \int Ric^{(2)}_{\kappa\nu} Ric^{(2)\kappa\nu} &= \delta \int Ric^{(2)}_{\kappa\nu} Ric^{(2)\kappa\nu}\sqrt{|\det g|} \\ &= \delta \int R_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\mu\nu} R^{\kappa\lambda}{}_{\lambda}{}^{\nu}\sqrt{|\det g|} \\ &= \delta \int R_{\kappa'\mu'\mu\nu} R^{\kappa}{}_{\lambda'\lambda\nu'} g_{\kappa\kappa'} g^{\mu\mu'} g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|} \\ &= \int R_{\kappa'\mu'\mu\nu} R^{\kappa}{}_{\lambda'\lambda\nu'}\Big(\delta(g_{\kappa\kappa'}) g^{\mu\mu'} g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|} \\ &+ g_{\kappa\kappa'}\delta(g^{\mu\mu'}) g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|} \\ &+ g_{\kappa\kappa'} g^{\mu\mu'}\delta(g^{\lambda\lambda'}) g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|} \\ &+ g_{\kappa\kappa'} g^{\mu\mu'} g^{\lambda\lambda'}\delta(g^{\nu\nu'})\sqrt{|\det g|} \\ &+ g_{\kappa\kappa'} g^{\mu\mu'} g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\nu'}\delta(\sqrt{|\det g|})\Big).\end{aligned}$$

Na osnovu Propozicije D.0.1, dobijamo da je

$$\begin{aligned}\delta\int Ric^{(2)}_{\kappa\nu}Ric^{(2)\kappa\nu} &= \int(\delta g_{\alpha\beta})\left(R^{\beta\mu}{}_{\mu\nu}R^{\alpha\lambda}{}_{\lambda}{}^{\nu} - R^{\kappa\beta\alpha\nu}R_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\lambda\nu} - R_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\mu\nu}R^{\kappa\beta\alpha\nu}\right.\\ &- \left. R_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\mu}{}^{\alpha}R^{\kappa\lambda}{}_{\lambda}{}^{\beta} + \frac{1}{2}R_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\mu\nu}R^{\kappa\lambda}{}_{\lambda}{}^{\nu}g^{\alpha\beta}\right)\\ &= \int(\delta g_{\alpha\beta})\left(Ric^{(2)\beta}{}_{\nu}Ric^{(2)\alpha\nu} - Ric^{(2)}{}_{\kappa}{}^{\alpha}Ric^{(2)\kappa\beta}\right.\\ &- \left. 2Ric^{(2)}{}_{\kappa\nu}R^{\kappa\beta\alpha\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}Ric^{(2)}{}_{\kappa\nu}Ric^{(2)\kappa\nu}\right).\end{aligned}$$

Koristeći činjenicu da je $Ric^{(2)} = -Ric$ i simetričnost Ricci tenzora, dobijamo

$$\delta\int Ric^{(2)}_{\kappa\nu}Ric^{(2)\kappa\nu} = \int(\delta g_{\alpha\beta})\left(2Ric_{\kappa\nu}R^{\kappa\beta\alpha\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}Ric_{\kappa\nu}Ric^{\kappa\nu}\right). \quad \text{(D.15)}$$

Bibliografija

[1] Brinkmann M W 1923 On Riemann spaces conformal to Euclidean space. *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA* **9** 1-3

[2] Eddington A S *The Mathematical Theory of Relativity* Cambridge 1952

[3] Einstein A 1905 Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **17** 891–921

[4] Fairchild E E Jr 1976 Gauge theory of gravitation *Phys. Rev.* D **14** 384-391

[5] Fairchild E E Jr 1976 Erratum: Gauge theory of gravitation *Phys. Rev.* D **14** 2833

[6] Griffiths J B 1991 *Colliding Plane Waves in General Relativity* Oxford University Press

[7] Hehl F W, McCrea J D, Mielke E W and Ne'eman Y 1995 Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance, *Phys. Rep.* **258** 1-171

[8] Hehl F W i Macías A 1999 Metric-affine gauge theory in gravity II. Exact solutions, *Int. J. Mod. Phys.* **D8** 399-416

[9] King A D and Vassiliev D 2001 Torsion waves in metric-affine field theory *Class. Quantum Grav.* **18** 2317-2329

[10] Lanczos C 1938 A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions *Ann. Math.* **39** 842-850

[11] Lanczos C 1949 Lagrangian multiplier and Riemannian spaces *Rev. Mod. Phys.* **21** 497-502

[12] Lanczos C 1957 Electricity and general relativity *Rev. Mod. Phys.* **29** 337-350

[13] Landau L D and Lifshitz E M 1975 *The Classical Theory of Fields (Course of Theoretical Physics vol 2)* 4nd edn, Pergamon Press, Oxford.

[14] Lukačević I 1980 *Osnovi teorije relativnosti* Naučna knjiga, Beograd

[15] Nakahara M 1998 *Geometry, Topology and Physics* Institute of Physics Publishing, Bristol

[16] Pasic V *New Vacuum Solutions for Quadratic Metric–affine Gravity* PhD Doctoral thesis, University of Bath, 2008.

[17] Pasic V and Vassiliev D 2005 PP-waves with torsion and metric-affine gravity *Class. Quantum Grav.* **22** 3961-3975

[18] Pauli W 1919 Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von Hermann Weyl *Physik. Zaitschr.* **20** 457-467

[19] Peres A 1959 Some gravitational waves, *Phys. Rev. Lett.* **3** 571-572

[20] Sakai T 1996 *Riemannian Geometry* American Mathematical Society

[21] Singh P 1990 On axial vector torsion in vacuum quadratic Poincaré gauge field theory *Phys. Let.* **145A** 7-10

[22] Singh P 1990 On null tratorial torsion in vacuum quadratic Poincaré gauge field theory *Class. Quantum Grav.* **7** 2125-2130

[23] Vassiliev D 2002 Pseudoinstantons in metric-affine field theory *Gen. Rel. Grav* **34** 1239-1265

[24] Vassiliev D 2005 Quadratic metric-affine gravity *Ann. Phys. (Lpz.)* **14** 231-252

[25] Vassiliev D 2006 Teleparallel model for the neutrino *Phys. Rev.* D **75** 025006 [6 pages]

[26] Weyl H 1919 Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, *Ann. Phys. (Lpz.)* **59** 101-133

[27] Yang C N Integral Formalism for Gauge Fields *Phys. Rev. Lett.* **33** 445-447