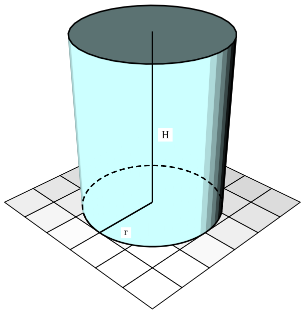
Sadržaj

Poglavlje

2 Funkcije sa više varijabli

Notacija $y = f(x)$, gdje je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, služila nam je za iskazati da je varijabla y zavisna od jedne varijable x, to jest reći da je y funkcija od x. Domen ovakve funkcije f je skup realnih brojeva (ili neki njegov podskup) i kažemo da je to funkcija jedne varijable. Mnoge veličine mogu se posmatrati u zavisnosti od više varijabli, te za njih onda kažemo da su funkcije više varijabli.

Naprimjer, zapremina kružnog cilindra je veličina ovisna o poluprečniku osnove cilindra (r) i njegove visine (H), to jest $V = \pi r^2 H$, pa kažemo da je V funkcija dvije varijable r i H. Izaberemo li notaciju za ovu funkciju sa f, tada je $V = f(r, H)$, te imamo da je



$$f(r, H) = \pi r^2 H \ , (\ r > 0\ ,\ \ H > 0\ )\ .$$

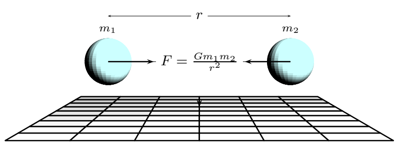
Pri tome su ograničenja na poluprečnik osnove ($r > 0$) i visinu ($H > 0$) prirodni uslovi jer te veličine ne mogu biti negativne, a ni nule jer takav cilindar onda ne postoji.

Snaga (u wattima) turbine na vjetar se opisuje jednačinom

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{40} \pi r^2 v^3\ ,$$

gdje je r krak turbine izložen vjetru (u metrima), v brzina vjetra (u $\frac{m}{s}$), a konstanta $\frac{49}{40}$ predtsvlja gustinu suhog zraka na 15 $°C$ na nultoj nadmorskoj viasini (u $\frac{kg}{m^3}$). Dakle, snaga (P) je funkcija ovisna o r i v, to jest $P = f(r, v)$.

Svaka dva tijela u univerzumu djeluju jedno na drugo silom, direktno proporcionalno njihovim masama i obrnuto proporcionalno kvadratu njihovog rastojanja (Newtonov zakon univerzalne gravitacije). Dakle, intenzitet gravitacionog privlačenja (F) između tijela mase m_1 i tijela mase m_2, koja se nalaze na rastojanju r, je funkcija tri varijable,



$$F = F(m_1, m_2, r) = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}\ ,\ (m_1, m_2, r > 0)\ ,$$

gdje je G univerzalna gravitaciona konstanta.

2.1 Pojam funkcije sa više varijabli

Definicija 2.1.1. *Neka su X i Y proizvoljni vektorski prostori. Ako svakoj tački $x \in X$ po nekom zakonu ili pravilu f dodijelimo tačno jednu tačku $y \in Y$, u oznaci $y = f(x)$, kažemo da je sa f definisano preslikavanje ili funkcija sa X u Y, što zapisujemo sa $f : X \to Y$.*

Za zadatu funkciju $f : X \to Y$ neka su $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Skup

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y \ ,$$

nazivamo slika skupa A u preslikavanju f, a skup

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X \ ,$$

nazivamo predslika skupa B u preslikavanju f. Skup X nazivamo domen, a skup $f(X) \subseteq Y$ nazivamo kodomen preslikavanja.
Veličinu x iz izraza $y = f(x)$ nazivamo original, ulazna veličina, input ili nezavisna promjenljiva ili varijabla, a veličinu y nazivamo slika, izlazna veličina, output ili zavisna promjenljiva ili varijabla.

S obzirom na domen i kodomen definisanog preslikavanja, razlikujemo nekoliko vrsta preslikavanja koja su za nas od interesa u ovom kursu matematike. U daljem tekstu podrazumijevamo da su $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ konačnodimenzionalni Euklidski prostori i posmatramo preslikavanja $f : X \to Y$, gdje je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{R}^m$.

U zavisnosti od $m, n \in \mathbb{N}$, razlikujemo nekoliko slučajeva.

- Ako su $n = m = 1$ imamo preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, koju nazivamo *realna funkcija realne promjenljive*. Ovo znači da je ulazna veličina funkcije (nezavisna varijabla) realan broj i da je izlazna veličina (zavisna varijabla) realan broj.
- Za $n = 1$ i $m > 1$ imamo preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, koje je *vektorska funkcija realne promjenljive*. Dakle, ulazna veličina je realan broj, a izlazna veličina je m-dimenzionalni vektor.
- Za $n > 1$ i $m = 1$ imamo preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, za koje kažemo da je *realna funkcija vektorske promjenljive*. Dakle, ulazna veličina je n-dimenzionalni vektor, a izlazna veličina je realan broj.
- Ako su $m, n > 1$ tada je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i kažemo da je to *vektorska funkcija vektorske promjenljive*. Ulazna veličina je n-dimenzionalni vektor i izlazna veličina je m-dimenzionalni vektor.

PRIMJER 1 : Obim kruga je zavisan samo o poluprečniku. To znači da je $O(r) = 2r\pi$, i predstavlja realnu funkciju realne promjenljive. Za konkretan realan broj r, dobijeni obim $O(r)$ je također realan broj.

PRIMJER 2 : Pomatrajmo let aviona na nekoj ruti u realnom vremenu. Želimo da znamo poziciju aviona u nekom vremenskom trenutku. To znači da je ulazni podatak vrijeme (realan broj), a izlazni podatak je trokomponentni vektor (x, y, z), gdje su x geografska širina, y geografska dužina i z visina leta. Dakle, u pitanju je vektorska funkcija realne promjenljive,

$$P_{oz}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \ .$$

PRIMJER 3 : Zapremina cilindra visine h i poluprečnika osnove r je data sa $V = r^2\pi h$, te je ona funkcija dvije varijable, $V(r, h)$. Za konkretne r i h zapremina je realan broj, te dakle $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i predstavlja realnu funkciju vektorske promjenljive.

PRIMJER 4 : Posmatramo li magnetno polje u trodimenzionalnom prostoru, svakoj tački prostora $(X(x, y, z))$ pridružujemo jačinu magnetnog polja u toj tački i smjer djelovanja polja, dakle u biti dvokomponentnu veličinu, ali kako je smjer određen nekim trodimenzionalnim vektorom možemo smatrati da je ovo preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Prema tome, ovo pridruživanje predstavlja vektorsku funkciju vektorske promjenljive.

2.1.1 Osnovni elementi funkcije

U ovom dijelu ćemo se bazirati na posmatranje realnih funkcija vektorske promjenljive.

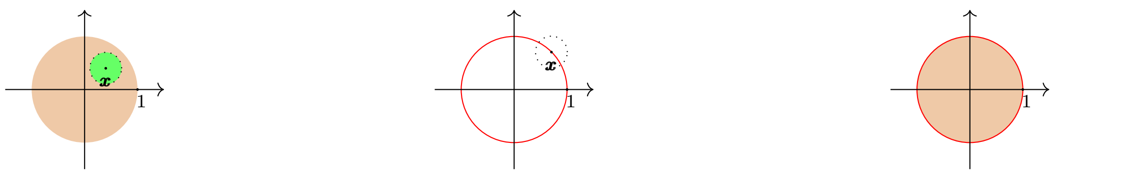
U izrazu $f : D_f \to \mathbb{R}$, skup $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ nazivamo domenom funkcije f i kao i kod funkcije jedne varijable, podrazumijevamo da je to "najširi" skup tačaka $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ za koje izraz $f(x_1, x_2, ...x_n) = f(\boldsymbol{x})$ ima smisla, tojest da je to neki realan broj. Veličine $x_1, x_2, ..., x_n$ nazivamo nezavisne varijabe, argumenti ili promjenljive funkcije f.
Za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadatu sa $z = f(x, y)$, kažemo da je funkcija dviju nezavisnih varijabli x i y, pri čemu je z zavisna varijabla. Za funkciju $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gdje je $w = g(x, y, z)$ kažemo da je funkcija tri varijable, gdje je w zavisna varijabla, a x, y, z su nezavisne varijable funkcije.

Domen funkcije n varijabli je proizvoljan podskup prostora $\mathbb{R}^n$. On može biti otvoren ili zatvoren skup i u principu se sastoji od unutrašnjih i rubnih tačaka. Tačka $\boldsymbol{x}$ je unutrašnja tačka skupa D ako oko nje možemo opisati kuglu koja komletno leži unutar skupa D, $B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq D$. Ako se skup D sastoji samo od unutrašnjih tačaka, onda kažemo da je on otvoren skup.
Tačka $\boldsymbol{x}$ je rubna tačka skupa D ako svaka kugla opisana oko nje sadrži i tačke iz skupa ali i tačke van tog skupa. Skup rubnih tačaka skupa D uobičajeno označavamo sa ∂D. Rubne tačke nisu obavezno elementi skupa. Ako skup D sadrži sve svoje rubne tačke, onda je on zatvoren skup.

(a) (b)

Slika 2.1: Unutrašnja i rubna tačka oblasti. Unutrašnja tačka je obavezno tačka skupa D, dok to za rubnu tačku ne mora biti slučaj.

Slično intervalima na realnoj pravoj koji mogu biti otvoreni ((a, b)), zatvoreni ($[a, b]$) ili ni otvoreni ni zatvoreni ($(a, b]$ ili $[a, b)$), i oblast u višedimenzionalnom prostoru ne mora biti ni otvorena ni zatvorena. Na slici 2.2 je prikazana situacija da ako otvorenoj kugli (a) "dodamo" sve tačke ruba (b), dobijamo zatvorenu kuglu (c). Naravno, ako otvorenom skupu dodamo samo neke tačke ruba (ne sve), takav skup ne bi bio ni otvoren ni zatvoren.



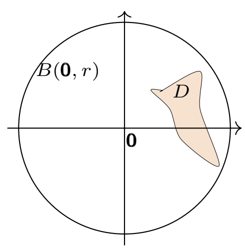
(a) Otvorena jedinična kugla, $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

(b) Rub jedinične kugle, $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (kružnica)

(c) Zatvorena jedinična kugla, $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Slika 2.2: Unutrašnje i rubne tačke jedinične kugle u ravni.

Dio prostora je ograničen ako leži unutar neke kugle fiksnog radijusa, u suprotnom kažemo da je on neograničen. Dakle, skup $D \subset \mathbb{R}^n$ je ograničen ako postoji kugla $B(\boldsymbol{x}, r)$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$), takva da je $D \subseteq B(\boldsymbol{x}, r)$. Primjeri ograničenih skupova u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ su: segment, trougao, pravougaonik, unutrašnjost kruga, elipsoid i slično. Neograničeni skupovi su na primjer prava linija, kvadranti, poluravni, oktanti.



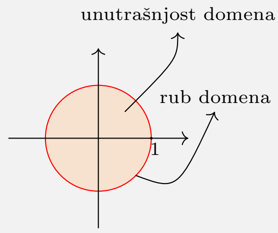
Primjer 5 : Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$, zadatu sa

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \ ,$$

x i y su nezavisne varijable. Kako je u pitanju korijena funkcija, znamo računati samo korijene iz nenegativnih brojeva, pa je otuda domen ove funkcije skup

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\} \ .$$

Domen je ograničen i zatvoren skup.



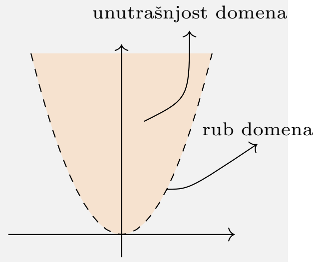
Primjer 6 : Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$, zadatu sa

$$f(x,y) = \log\left(y-x^2\right) \ ,$$

x i y su nezavisne varijable. Znamo računati samo logaritme pozitivnih brojeva, te je domen ove funkcije skup

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\} \ .$$

Domen je neograničen skup i u ovom primjeru on se sastoji samo od unutrašnjih tačaka.



Kodomen funkcija više varijabli je dio realne prave i naravno diktiran je samom funkcijom. Primjere nekih funkcija sa njihovim domenima i kodomenima dajemo u narednoj tabeli.

Funkcija	Domen	Kodomen
$f(x,y) = x+y$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}$
$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$	$\mathbb{R}^2$	$(0,1)$
$z = \sqrt{y-x^2}$	$y \ge x^2$	$[0,+\infty)$
$z = \log(1-x^2-y^2)$	$x^2+y^2 < 1$	$(-\infty,+\infty)$
$z = \dfrac{1}{xy}$	$xy \ne 0$	$(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$
$w = \dfrac{z^2}{x^2+y^2}$	$x^2+y^2 \ne 0$	$[0,+\infty)$

2.1.2 Grafičko predstavljanje funkcija

U grafičkom predstavljanju funkcija više varijabli uobičajena su dva načina, pomoću nivo linija i pomoću grafa.

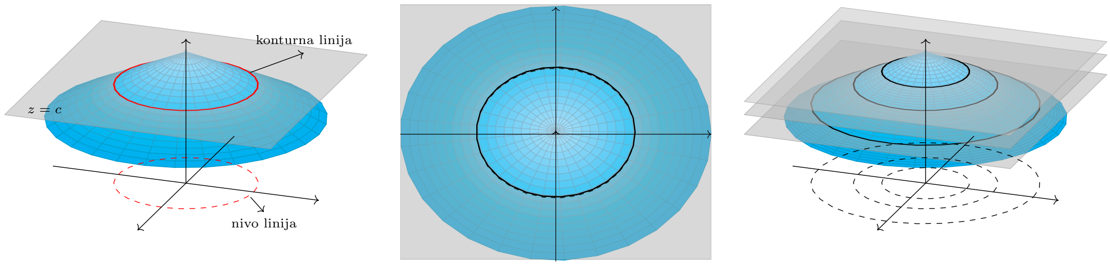
Definicija 2.1.2. *Za datu funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i realan broj c, skup*

$$L = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n |\ f(\boldsymbol{x}) = c\}$$

nazivamo nivo skup funkcije f za nivo c. Za $n = 2$, L nazivamo nivo linija funkcije f, a za $n = 3$, kažemo da je L nivo površ funkcije f. Crtanje koje prikazuje nivo skupove za različite nivoe nazivamo konturno crtanje funkcije.

Naprimjer, kod funkcije dvije promjenljive $z = f(x,y)$, držeći z fiksnim, tojest stavljajući $f(x,y) = c$, geometrijski to tumačimo kao presjecanje površi $f(x,y)$ sa ravni $z = c$ (Slika 2.3 (a)). U presjeku (crvena linija) dobijamo sve tačke površi $f(x,y)$ čija je vrijednost (vrijednost zavisne promjenljive z) jednaka c i datu liniju nazivamo *konturna linija (kriva)*. Projektovanjem konturne linije u xOy ravan dobijamo liniju koju nazivamo *nivo linija (kriva)*. Ovo možemo zamisliti kao da figuru na slici (2.3) gledamo iz neke "daleke" tačke na z-osi, što vidimo na slici (2.3.(b)). Radeći ovaj postupak za razne c, dobijamo konturnu sliku grafa.

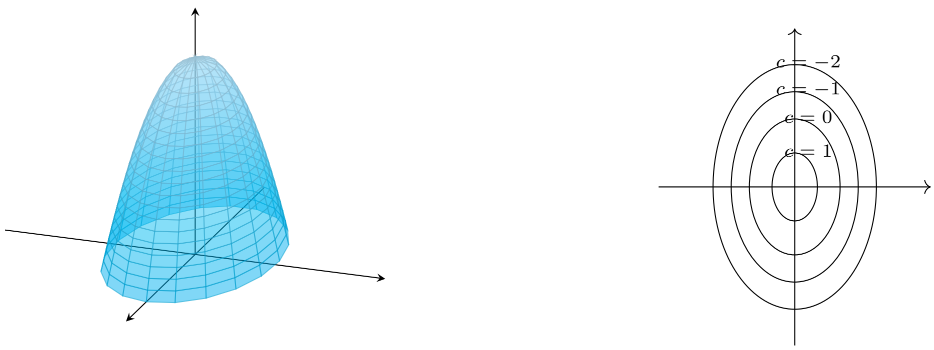
Primjer 7 : Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadata sa $f(x,y) = 4-2x^2-y^2$. Za zadato $c \in \mathbb{R}$, skup tačaka koje zadovoljavaju



(a) Presjek sa ravni $z = c$ (b) Pogled sa z-ose (c) Nekoliko presjeka

Slika 2.3: Konturna linija grafa i njoj odgovarajuća nivo linija.

jednakost $4 - 2x^2 - y^2 = c$ predstavlja nivo skup funkcije f. Jasno, ako je $c > 4$, taj skup je prazan jer bi u tom slučaju imali da je $-2x^2 - y^2 > 0$, što očigledno nije moguće niti za jedno $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; za $c = 4$ on se sastoji samo od jedne tačke, $(0, 0)$ (rješenje jednačine $-2x^2 - y^2 = 0$ je samo jedna tačka $(x, y) = (0, 0)$); za $c < 4$ taj skup je elipsa sa centrom u koordinatnom početku, to jest za svako $c < 4$ nivo linija je predstavljena elipsom, što je prikazanao na donjoj slici (slika 2.4 desno) za nekoliko različitih nivoa (izborom vrijednosti konstante $c = -2,\ c = -1,\ c = 0$ i $c = 1$).



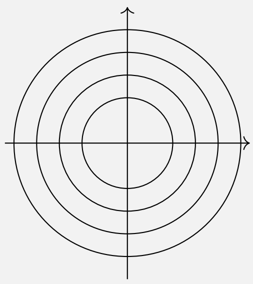
(a) Graf funkcije $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$. (b) Nivo linije funkcije $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$.

Slika 2.4: Formiranje konturne slike.

Primjer 8 : Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadata sa

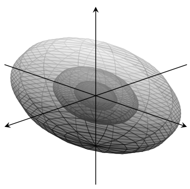
$$f(x, y) = \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Za proizvoljnu tačku (x, y) na centralnoj kružnici $x^2 + y^2 = r^2$, poluprečnika $r > 0$, funkcija $f(x, y)$ ima konstantnu vrijednost $\frac{\sin r}{r}$, pa će nivo linije ove funkcije, kao što je prikazano na slici sa strane, biti koncentrični krugovi sa centrom u koordinatnom početku.

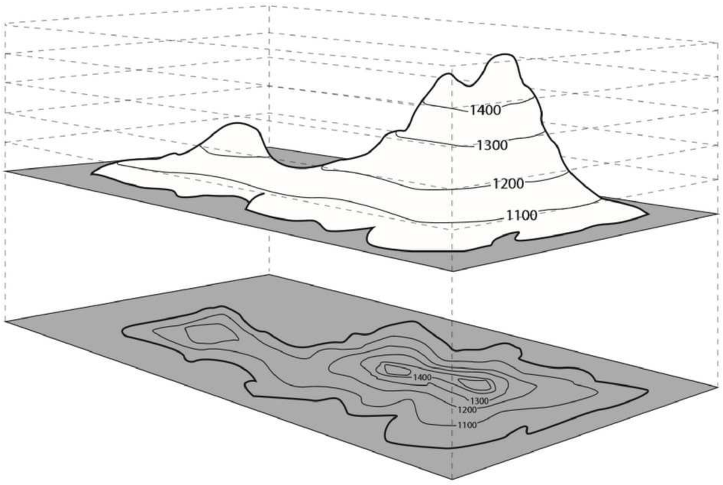


Primjer 9 : Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, zadatu sa $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Jedna nivo površ ove funkcije zadata je jednačinom $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, što predstavlja jednačinu elipsoida. Primjetimo da ako u gornjoj jednačini fiksiramo $z = z_0$, dobijamo jednačinu $x^2 + 2y^2 = 1 - 3z_0^2$, a to su elipse u xOy ravni,

što opravdava činjenicu da su nivo površi funkcije f elipsoidi (slično smo mogli fiksirati i varijable x i y i dobiti da su projekcije u yOz ravan i u xOz ravan takođe elipse). Generalno, nivo površi date funkcije su elipsoidi $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = c$, gdje je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.



Primjer nivo linija imamo u kartografiji. Naime, kada na karti, koja je dvodimenzionalni prikaz trodimenzionalnog terena, želimo prikazati planinu, onda to upravo činimo prikazom punom linijom onih tačaka te planine koje su na istoj nadmorskoj visini. To je prikazano na slici 2.5, gdje se "uvećanje" nivo linija (nadmorske visine) dobija uvećanjem nadmorske visine za 100 metara. Ovim načinom u meteorologiji predstavljamo izobare (područja sa istim pritiskom), izoterme (područja sa istom temperaturom) i slično.

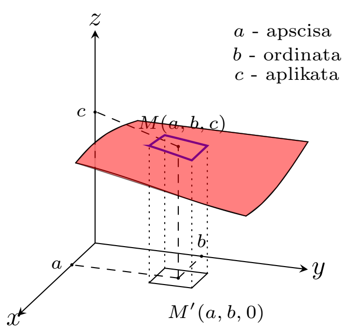


Slika 2.5: Prikazivanje nadmorskih visina pomoću nivo linija.

Kod proučavanja funkcije jedne promjenljive, $y = f(x)$, svakom smo paru (x, y) pridruživali jednu tačku $M(x, y)$ u realnoj ravni. Skup svih takvih tačaka M, činio je grafik funkcije f i on je bio predstavljen kao kriva linija u ravni. U slučaju kada posmatramo funkciju dvije promjenljive $z = f(x, y)$, grafik funkcije će biti izražen tačkama $M(x, y, z)$, dakle u trodimenzionalnom prostoru. Pri tome vrijedi

1° Svaka tačka grafika, $M(x, y, z)$, ima apscisu (po x-osi) i ordinatu (po y-osi) koje predstavljaju koordinate neke tačke $X(x, y)$ iz domena funkcije, i aplikatu (po z-osi) koja je jednaka vrijednosti funkcije u tački $X(x, y)$.

2° Svaka tačka $M(x, y, z)$ prostora za koju tačka $X(x, y)$ pripada domenu funkcije, a aplikata z je jednaka vrijednosti funkcije u tački X, pripada grafiku funkcije.



Na osnovu rečenog zaključujemo da je grafik funkcije slika njene oblasti definisanosti. Ako je $z = f(x, y)$ definisana u oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$, njen grafik predstavlja površ u prostoru $\mathbb{R}^3$, čija je projekcija na xy-ravan oblast D.

Definicija 2.1.3. *Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Skup*

$$G = \{(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)\} ,$$

nazivamo graf funkcije f.

Primjetimo da je graf G funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, pa kao posljedicu toga imamo da smo u mogućnosti geometrijski predstavljati samo neke slučajeve. Kada je $n = 1$, graf je u prostoru $\mathbb{R}^2$ i tada imamo krivu koja predstavlja funkciju jedne varijable. Kada je $n = 2$, u kom slučaju je graf površ u trodimenzionalnom prostoru. Šta bi bila geometrijska interpretacija grafika funkcije 3 ($n = 3$) i više promjenljivih za sada nam je nemoguće reći, s obzirom da nemamo način da prikažemo uređene četvorke, petorke itd.

Primjer 10 : Graf funkcije $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, prestavlja skup uređenih trojki $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, koje zadovoljavaju jednakost $z = 2x^2 + y^2$. Da bi predstavili graf ove funkcije u $\mathbb{R}^3$, koristimo ideju da predstavljamo dijelove tog grafa koji leže iznad mreže linija paralelnih osama u xy-ravni. Na primjer, za jedno fiksirano $x = x_0$, skup tačaka koje zadovoljavaju jednačinu

$$z = 2x_0^2 + y^2 ,$$

predstavlja parabolu koja leži iznad linije $x = x_0$ u xy-ravni. Na isti način, ako fiksiramo $y = y_0$, skup tačaka koje zadovoljavaju jednačinu $z = 2x^2 + y_0^2$, je parabola koja leži iznad linije $y = y_0$. Ako istovremeno nacrtamo više tih parabola za razne $x = x_0$ i $y = y_0$, dobijamo mrežnu predstavu te površi (grafa) i u ovom slučaju ta površ je paraboloid (Slika 2.6).

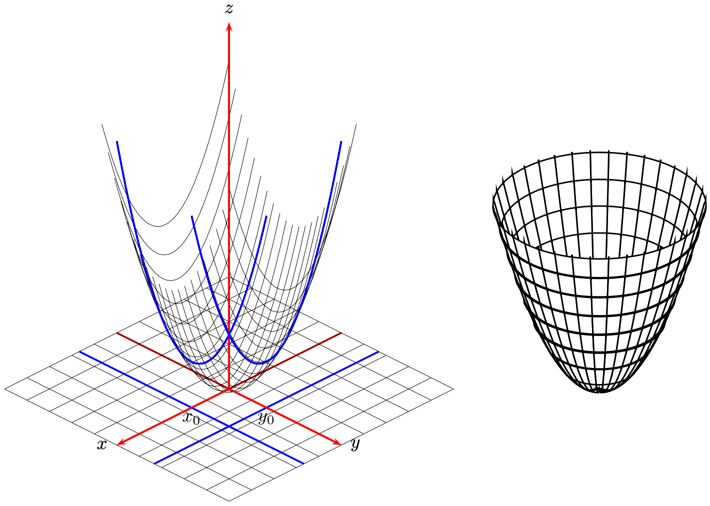
Primjer 11 : Mada se za grafove mnogih funkcija možemo poslužiti idejom mreže, izloženom u gornjem primjeru, za većinu funkcija dobra slika njihovih grafova zahtjeva upotrebu računarske grafike ili eventualno mnogo umjetničke vještine. Tako naprimjer, za predstavljanje grafa funkcije

$$f(x, y) = \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} ,$$

možemo se poslužiti konturnim crtanjem i zaključiti da graf funkcije osciluje ukoliko se pomjeramo od koordinatnog početka u bilo kom pravcu, tačnije da nivo krugovi iz konturnog crtanja rastu i opadaju sa oscilacijom $\frac{\sin r}{r}$, gdje je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ekvivalentno, dijelovi grafa funkcije f iznad proizvoljne linije u xy-ravni koja prolazi kroz koordinatni početak, predstavljeni su funkcijom

$$z = \frac{\sin r}{r} .$$

Ovo zaista jeste dobra ideja za predstavljanje grafa funkcije f, ali iskreno govoreći mnogi ne bi bili u



Slika 2.6: Paraboloid; Graf funkcije $z = 2x^2 + y^2$.

stanju produkovati sliku tog grafa koja je prikazana na slici (**??**). Primjetimo takođe da naša funkcija nije definisana u tački $(0,0)$ ali da ona teži ka vrijednosti 1, kada tačka (x,y) teži ka $(0,0)$, što je opravdano činjenicom

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sin r}{r} = 1 \ .$$

Ovdje treba otkloniti i nedoumicu oko funkcija oblika $z = \sin x$ (Slika **??** lijevo) ili $z = y^2$ (Slika **??** desno). Naime, u oba slučaja podrazumijevamo da je $z = z(x,y)$ pa grafici predstavljaju površi u prostoru, a nepojavljivanje neke od varijabli znači njenu proizvoljnost u definisanosti funkcije.

2.2 Granična vrijednost funkcije sa više varijabli

2.2.1 Pojam granične vrijednosti

Neka je data funkcija $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Sa $U_{\boldsymbol{a}}$ označimo proizvoljnu okolinu tačke $\boldsymbol{a}$ i neka je $L \in \mathbb{R}$ i U_L okolina tačke L.

Definicija 2.2.1. *Funkcija n nezavisnih projenljivih, $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\boldsymbol{x})$, ima u tački $\boldsymbol{a}$ graničnu vrijednost jednaku L, ako vrijedi,*

1° *tačka $\boldsymbol{a}$ je tačka nagomilavanja domena funkcije f,*

2° *za proizvoljnu okolinu U_L, postoji okolina $U_{\boldsymbol{a}}$, tako da se vrijednost funkcije $f(\boldsymbol{x})$ nalazi u okolini U_L za svaku tačku $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ koja se nalazi u $U_{\boldsymbol{a}}$.*

Činjenicu da funkcija f ima u tački $\boldsymbol{a}$ graničnu vrijednost jednaku L, simbolički zapisujemo sa

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{(x_1,...,x_n)\to(a_1,..,a_n)} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{x_1\to a_1,...,x_n\to a_n} f(x_1, x_2, ..., x_n) = L \ .$$

Posmatrani limes nazivamo simultani limes, a odgovarajuću graničnu vrijednost nazivamo simultana granična vrijednost.

Istaknimo da za postojanje granične vrijednosti, sama tačka $\boldsymbol{a}$ ne mora pripadati domenu funkcije f, što ističemo prvim zahtjevom u gornjoj definiciji. Ako se za okoline $U_{\boldsymbol{a}}$ koriste sferne okoline, onda drugi uslov gornje definicije iskazujemo sa:

2° za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takav da za sve $\boldsymbol{x}$ za koje je $0 < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \iff 0 < \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \delta$, vrijedi $|f(\boldsymbol{x}) - L| < \varepsilon$,

a ukoliko koristimo kubne okoline, drugi uslov izgleda ovako.

2° za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takav da za sve $\boldsymbol{x}$ za koje je $0 < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \iff 0 < |x_i - a_i| < \delta,\ i = 1, 2, ..., n$, vrijedi $|f(\boldsymbol{x}) - L| < \varepsilon$.

Posmatrajmo neke slučajeve graničnog procesa za funkciju dvije promjenljive.

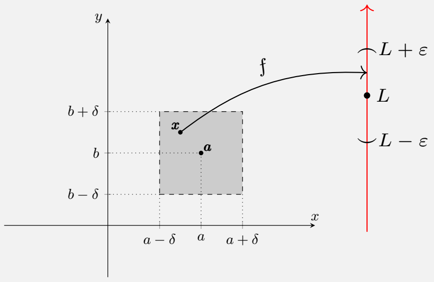
PRIMJER 12 : Naprimjer, slučaj

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\,\to\,a\\ y\,\to\,b}} f(x,y) = L \ , \tag{2.1}$$

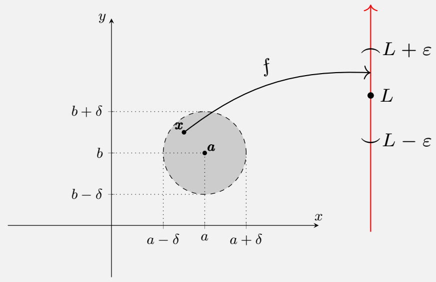
tumačimo na sljedeći način:
Ako fiksiramo $\varepsilon > 0$, onda postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da važi

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \ ,$$

kad god su x i y takvi da važi $|x - a| < \delta$ i $|y - b| < \delta$ (kubna okolina), ili $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ (sferna okolina). Pri tome je okolina tačke $\boldsymbol{a} = (a, b)$, u zavisnosti od metrike data na slici,



Slika 2.7: Kugla sa metrikom d_∞



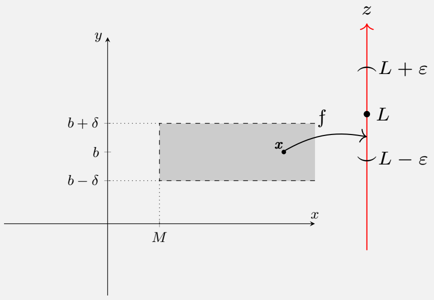
Slika 2.8: Kugla sa metrikom d_2

Sada nam granični proces (2.1) govori da je slika svakog $\boldsymbol{x}$ iz odgovarajuće okoline tačke $\boldsymbol{a}$, u nekoj okolini broja L na z-osi.

Primjer 13 : Granični proces

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to b}} f(x,y) = L \ ,$$

tumačimo na sljedeći način: Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ i $M(\varepsilon) > 0$ takvi da važi $|f(x,y) - L| < \varepsilon$, kad god su x i y takvi da je $x > M$ i $|y - b| < \delta$. Pri tome je okolina tačke približavanja beskonačni pravougaoni pojas prikazan na slici,



Kao i u prethodnom primjeru, za svako $\boldsymbol{x}$ iz pravougaonog pojasa (formalno okolina tačke $\boldsymbol{a} = (x \to \infty, b)$), vrijednost $f(\boldsymbol{x})$ će ležati u okolini broja L na z-osi.

Sljedeće osobine graničnih vrijednosti funkcija više varijabli, analogon su i iskazom i dokazom odgovarajućih tvrdnji za funkcije jedne varijable.

Teorem 2.2.1. *Neka su $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in D_f \cap D_g$ i $\boldsymbol{a}$ tačka nagomilavanja domena funkcija f i g. Neka postoje*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = F \quad i \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = G \ .$$

Tada postoje i granične vrijednosti funkcija $f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x})$, $\frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$ $(g(\boldsymbol{x}) \neq 0)$ i $kf(\boldsymbol{x})$ $(k \in \mathbb{R})$ i pri tome vrijedi,

1. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})) = F \pm G$,
2. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x})) = F \cdot G$,
3. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \dfrac{F}{G}$, $G \neq 0$,
4. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} kf(\boldsymbol{x}) = kF$.

Gornju tvrdnju treba shvatiti kao pravila izračunavanja limesa funkcija više varijabli. Tako naprimjer, tvrdnju pod 1. treba shvatiti da limes zbira ili razlike funkcija računamo kao zbir ili razliku limesa funkcija, to jest

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \pm \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) \ ,$$

naravno pod pretpostavkom da limesi pojedinačnih funkcija postoje.

Primjer 14 : Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadata sa

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_k \ , \ k \in \{1, 2, ..., n\} \ .$$

Ukoliko sada posmatramo granični proces kada $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, to jest $(x_1, x_2, ..., x_n) \to (a_1, a_2, ..., a_n)$, što u stvari znači da za proizvoljno $i \in \{1, 2, ..., n\}$ vrijedi $x_i \to a_i$, tada imamo

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(x_1, x_2, ...x_n) = \lim_{(x_1,...,x_n)\to(a_1,...,a_n)} x_k = a_k \ .$$

Specijalno, ako posmatramo funkciju $f(x, y) = x$, onda imamo

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \ .$$

Primjer 15 : Neka je sada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, zadata sa $f(x, y, z) = xyz$. Koristeći Teorem 2.2.1 i gornji primjer, imamo

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) &= \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} xyz \\ &= \left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} x\right)\left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} y\right)\left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} z\right) \\ &= abc \ . \end{aligned}$$

Dakle, ako imamo da je $A(1, 2, 1)$, tada je

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,1)} xyz = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \ .$$

Primjer 16 : Kombinujući prethodno, sada računamo

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(-1,2)} (x^2 + y^2 - 3xy) = &\left(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x\right) + \\ &\left(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} y\right)\left(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} y\right) - 3\left(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} y\right) \\ &= (-1)(-1) + 2 \cdot 2 - 3(-1)2 = 11 \ . \end{aligned}$$

Sva tri gornja primjera predstavljaju primjere graničnih procesa posebne klase funkcija više varijabli. Naime, funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, oblika

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = cx_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \ ,$$

gdje je c skalar, a k_i $(i = 1, 2, ..., n)$ nenegativni cijeli brojevi, nazivamo *monomom* ili monomijalna funkcija. Funkciju koja predstavlja sumu monoma nazivamo *polinom* ili *polinomijalna funkcija.*

Za nešto složenije funkcije trebat će nam i dodatni alat. Sljedeći rezultat nam govori o graničnom procesu kompozicije funkcije više varijabli i funkcije jedne varijable.

Teorem 2.2.2. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ako postoji granična vrijednost*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = F$$

i ako je h neprekidna funkcija, tada vrijedi

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(f(\boldsymbol{x})) = h\left(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\right) = h(F) \ .$$

Koristeći Teorem 2.2.2 i prethodno razmatranje za polinomijalne funkcije, lagano računamo i granične procese složenijih funkcija.

Primjer 17 : Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, zadata sa

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2} \ .$$

Kako je korjena funkcija neprekidna, sada imamo

$$\begin{aligned}\lim_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(a_1,a_2,...,a_n)} f(x_1,x_2,...,x_n) &= \sqrt{\lim_{(x_1,...,x_n)\to(a_1,...,a_n)}(x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)}\\ &= \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}\ .\end{aligned}$$

Ili za funkciju $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, zadatu sa $f(x,y)=e^{(x^3-y^2+3x^2y)}$ imamo,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} e^{(x^3-y^2+3x^2y)} &= e^{\left(\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x^3-y^2+3x^2y)\right)}\\ &= e^3\ .\end{aligned}$$

U oba primjera podrazumijevamo da je tačka $\boldsymbol{a}$ iz domena funkcije f.

Pored polinomijalnih, često se susrećemo i sa funkcijama oblika

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{g(\boldsymbol{x})}{h(\boldsymbol{x})}\ ,$$

gdje su g i h polinomijalne funkcije. Takvu funkciju nazivamo *racionalna funkcija*. I ovdje, ukoliko je tačka graničnog procesa $\boldsymbol{a}$ iz domena funkcije, limes računamo jednostavno. Naime vrijedi,

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=\frac{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})}{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x})}\ .$$

Primjer 18 : Neka je $f(x,y,z)=\dfrac{x^2y+5xyz}{2x^2+3z^2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,2)} f(x,y,z) &= \lim_{(x,y,z)\to(1,-1,2)}\frac{x^2y+5xyz}{2x^2+3z^2}\\ &= \frac{1^2(-1)+5\cdot1\cdot(-1)\cdot2}{2\cdot1^2+3\cdot2^2}\\ &= \frac{-6}{14}=-\frac{3}{7}\ .\end{aligned}$$

Primjer 19 :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)}\ln\left(\frac{xy}{2x^2+y^2}\right) &= \ln\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{xy}{2x^2+y^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2}{6}\right)=-\ln 3\ .\end{aligned}$$

Napomenimo još jednom bitnost pretpostavke da je granična tačka u svim gornjim primjerima graničnih procesa, bila tačka oblasti definisanosti posmatrane funkcije. Međutim, u definiciji granične vrijednosti funkcije više varijabli, zahtjevalimo smo u 1° da je $\boldsymbol{a}$ tačka nagomilavanja domena funkcije, što znači da granične vrijednosti možemo računati i u nekim "drugim" tačkama. Tako naprimjer, za funkciju

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\ ,$$

tačka $\boldsymbol{a}=(0,0)$ nije iz domena, ali jeste tačka nagomilavanja domena funkcije. Iako je naša funkcija racionalna, ne bismo mogli primjeniti raniji postupak izračunavanja limesa ove funkcije u tački $\boldsymbol{a}$ jer bi to dovelo do neodređenog oblika $\frac{0}{0}$.

Ipak, ako izaberemo tačku $\boldsymbol{x}$ dovoljno blisku tački $\boldsymbol{a}$, to jest neka je

$$0<d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon\ ,$$

za proizvoljno $\varepsilon > 0$, tada ćemo imati

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|^2|y|}{|x^2+y^2|} \le \frac{d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})^2 d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})^2} = d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) < \varepsilon \ .$$

Ovo na osnovu Definicije **??** znači da vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \ .$$

Za utvrđivanje egzistencije granične vrijednosti funkcije više varijabli naredna tvrdnja može biti od velike koristi.

Teorem 2.2.3. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka postoji*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = F \ .$$

Tada za proizvoljan niz $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_f$, takav da $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}$ $(n\to\infty)$, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) = F \ .$$

Ovu tvrdnju možemo sada primjeniti na maloprije urađeni primjer. Naime, utvrdili smo da postoji limes funkcije $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ u tački $\boldsymbol{a} = (0,0)$. Na osnovu posljednje tvrdnje, posmatramo li proizvoljan niz tačaka $(\boldsymbol{x}_n = (x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ iz domena funkcije, koji konvergira ka tački $\boldsymbol{a} = (0,0)$ mora vrijediti

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) \ .$$

Posmatrajmo niz $(x_n,y_n) = (\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ $(n\in\mathbb{N})$. Jasno je da vrijedi $(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \to (0,0)$ kada $n\to\infty$. Sada imamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0 \ .$$

Kako gornja tvrdnja daje samo potrebne, a ne i dovoljne uslove egzistencije granične vrijednosti mnogo ju je bolje koristiti u kontrapoziciji. Naime, ako postoje nizovi $(\boldsymbol{x}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\boldsymbol{x}''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da $\boldsymbol{x}'_n \to \boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{x}''_n \to \boldsymbol{a}$ kada $n\to\infty$, za koje je

$$\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}'_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}''_n) \ ,$$

tada ne postoji limes $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$.

PRIMJER 20 : Ispitajmo postojanje granične vrijednosti funkcije $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ u tački $A(0,0)$.
Posmatrajmo nizove tačaka $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Očigledno oba niza konvergiraju ka tački $A(0,0)$. Međutim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{1}{2} \ .$$

Dakle, granična vrijednost posmatrane funkcije u tački $A(0,0)$ ne postoji.

2.2.2 Simultana i uzastopna granična vrijednost

Prisjetimo se da smo za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, postojanje granične vrijednosti

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \ ,$$

opravdavali postojanjem i jednakošću lijeve i desne granične vrijednosti u tački a, to jest uslovom

$$\lim_{x\to a-} f(x) = L = \lim_{x\to a+} f(x) \ .$$

Ukoliko jedna od ovih graničnih vrijednosti u tački a ne postoji, tada ne postoji ni granična vrijednost funkcije u toj tački. Slično razmišljanje možemo primjeniti i za funkciju više varijabli, ali razlika leži u činjenici što će sada postojati beskonačno mnogo krivih po kojima se tačka X može približavati nekoj tački A u prostoru $\mathbb{R}^n$, za razliku od samo dvije mogućnosti u prostoru $\mathbb{R}$.

Slika 2.9: Prilaz tački na pravoj (lijevo) i u ravni (desno)

Graničnu vrijednost L, definisanu u Definiciji 2.2.1, nazivamo *simultana granična vrijednost* funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. To je bio slučaj kada se tačka $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ približava ka tački $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ tako da sve koordinate x_i tačke X istovremeno teže ka odgovarajućim koordinatama a_i tačke A. Međutim, granični proces možemo posmatrati i tako da puštamo prvo jednu koordinatu da teži odgovarajućoj fiksnoj vrijednosti, a ostale držimo fiksnim. Zatim puštamo neku drugu koordinatu da teži fiksnoj vrijednosti, a preostale držimo fiksnim i tako do posljednje koordinate. Na taj način bismo posmatrali granični proces u obliku

$$\lim_{x_n\to a_n} \lim_{x_{n-1}\to a_{n-1}} \cdots \lim_{x_2\to a_2} \lim_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2, ..., x_n) \ ,$$

i posmatrani proces nazivamo *uzastopni* ili *sukcesivni* limes funkcije.

Posmatrajmo sada funkciju dvije promjenljive $f(x, y)$. Pored simultane granične vrijednosti, prema gore rečenom, od interesa je posmatrati još dvije granične vrijednosti, a to su

$$L_{12} = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y) \ , \ L_{21} = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y) \ ,$$

koje nazivamo *uzastopne granične vrijednosti* (Slika 2.10).

Slika 2.10: Uzastopni limesi: $L_{21} = \lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a}$ (lijevo) i $L_{12} = \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{y\to b}$ (desno)

Pri tome podrazumijevamo sljedeće,

$$L_{12} = \lim_{x\to a} \left(\lim_{y\to b} f(x, y) \right) \ , \ L_{21} = \lim_{y\to b} \left(\lim_{x\to a} f(x, y) \right) \ ,$$

odnosno, u izračunavanju limesa L_{12} prvo računamo $\lim\limits_{y\to b} f(x, y)$, držeći x fiksnim, a zatim od dobijenog rezultata računamo limes, puštajući da $x \to a$. Kod L_{21} princip je obrnut, prvo računamo $\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$, držeći y fiksnim, a onda od dobijenog posmatramo granični proces kada $y \to b$.

PRIMJER 21 : Izračunati uzastopne limese funkcije $f(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}$ u tački $A(2,1)$.

$$L_{12}=\lim_{x\to 2}\left(\lim_{y\to 1}\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{1}{5}\ .$$

$$L_{21}=\lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 2}\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 1}\frac{2-y}{4+y^2}=\frac{1}{5}\ .$$

Veza simultane i uzastopnih graničnih vrijednosti data je nerednim tvrđenjem.

Teorem 2.2.4. *Ako postoji simultana granična vrijednost*

$$L=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$$

i ako za svako y postoji granična vrijednost $\lim_{x\to a} f(x,y)$, tada postoji i uzastopna granična vrijednost

$$L_{21}=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)\ ,$$

i vrijedi $L=L_{21}$.

Dokaz : Ako postoji simultana granična vrijednost L, to znači da za svako $\varepsilon>0$, postoji $\delta>0$ tako da vrijedi

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon\ ,$$

kad god je $|x-a|<\delta$ i $|y-b|<\delta$. Ako fiksiramo y_0 tako da je $|y_0-b|<\delta$, prema pretpostavci teorema, postoji

$$\lim_{x\to a} f(x,y_0)\ .$$

Kako je fiksirano y_0 bilo proizvoljno, postojat će i granična vrijednost

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)\ ,$$

pa je L granična vrijednost funkcije $F(y)=\lim_{x\to a} f(x,y)$ kada $y\to b$, čime je dokaz završen. ∎

Formulaciju gornjeg teorema možemo iskazati potpuno analogno koristeći i graničnu vrijednost L_{12}. Posljedice ovog teorema su:

1) Ako postoje simultana i uzastopne granične vrijednosti tada vrijedi

$$L=L_{12}=L_{21}\ .$$

2) Ako postoje uzastopne granične vrijednosti i ako je $L_{12}\neq L_{21}$, onda simultana granična vrijednost L ne postoji.

PRIMJER 22 : Posmatrajmo funkciju $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ u tački $O(0,0)$.

$$L_{12}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1\ .$$

$$L_{21}=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1\ .$$

$L_{12}\neq L_{21}$ pa dakle L ne postoji.

PRIMJER 23 : $f(x,y)=x\cos y$, $x\to 0$ i $y\to+\infty$.

Zbog ograničenosti funkcije kosinus vrijedi

$$L = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to +\infty}} x \cos y = 0 \ .$$

$$L_{21} = \lim_{y \to +\infty} \lim_{x \to 0} x \cos y = 0 \ .$$

L_{12} ne postoji jer ne postoji granična vrijednost $\lim\limits_{y \to +\infty} \cos y$.

Primjetimo da čak i ako su uzastopne granične vrijednosti jednake, to jest $L_{12} = L_{21}$, o simultanoj graničnoj vrijednosti ne možemo tvrditi ništa sa sigurnošću.

Primjer 24 : $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $x \to 0$ i $y \to 0$.

$$L_{12} = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = L_{21} \ .$$

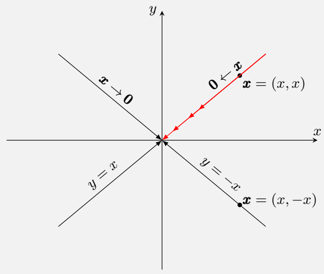
Bez obzira na jednakost uzastopnih graničnih vrijednosti simultani limes u tački $(0, 0)$ ne postoji! Zaista, ako se tački $\mathbf{0} = (0, 0)$ približavamo po pravoj $y = x$ (to jest ako posmatramo tačke oblika $\boldsymbol{x} = (x, x)$, a to onda znači da ako $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$, onda mora $x \to 0$), tada je

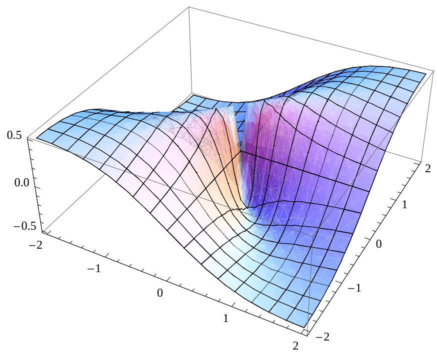
$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \ ,$$

a ako se ka tački $(0, 0)$ približavamo po pravoj $y = -x$, to jest posmatramo tačke oblika $\boldsymbol{x} = (x, -x)$, imamo

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \ ,$$

iz čega je jasno da L ne postoji.





Slika 2.11: Graf funkcije $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Sa gornjim primjerima smo pokazali neke od mogućnosti ali i probleme kod određivanja graničnih procesa funkcija više varijabli.

2.3 Neprekidnost funkcije sa više varijabli

Kao i kod funkcije jedne varijable, neprekidnost funkcije više varijabli definisana je direktno u vezi sa limesom funkcije. Pri tome, pričati o neprekidnosti preslikavanja ima smisla samo u tačkama u kojima je preslikavanje definisano.

Definicija 2.3.1. *Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana u okolini tačke $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Funkcija f je neprekidna u tački $\boldsymbol{a}$ ako i samo ako vrijedi*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) \ .$$

Iz gornje definicije vidimo da bi funkcija f bila neprekidna u tački $\boldsymbol{a}$ treba biti zadovoljeno:

1° da funkcija bude definisana u tački $\boldsymbol{a}$,

2° da postoji granična vrijednost funkcije kada $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$,

3° da granična vrijednost funkcije u tački $\boldsymbol{a}$ bude jednaka vrijednosti funkcije u toj tački.

Definicija 2.3.2. *Funkcija f je neprekidna u tački $\boldsymbol{a}$ ako se za svako $\varepsilon > 0$ može odrediti $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tako da je za sve $\boldsymbol{x}$, takve da je $0 \le d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta$, zadovoljeno*

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon \ .$$

Funkcija je neprekidna u oblasti D ako je neprekidna u svakoj tački te oblasti.

Naravno da gornju definiciju možemo posmatrati bilo sa sfernom bilo sa kubnom okolinom tačke.

Iz razmatranja u prethodnoj sekciji, vezana za polinomijalne i racionalne funkcije, sada imamo sljedeća tvrđenja.

Teorem 2.3.1. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinomijalna funkcija. Tada za svako $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) \ ,$$

to jest polinomijalna funkcija je neprekidna u svakoj tački $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.

Primjer 25 : Za polinomijalnu funkciju $f(x,y) = 3x^3 + 2xy - x + y$ posmatrajmo granični proces kada $(x,y) \to (0,-1)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,-1)} (3x^3 + 2xy - x + y) = -1 = f(0,-1) \ .$$

Generalno, ako $(x,y) \to (x_0, y_0)$ zbog neprekidnosti polinomijalne funkcije imamo,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 3x_0^3 + 2x_0y_0 - x_0 + y_0 = f(x_0,y_0) \ .$$

Teorem 2.3.2. *Ako je racionalna funkcija f definisana u tački $\boldsymbol{a}$, tada vrijedi*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) \ ,$$

to jest racionalna funkcija je neprekidna u svakoj tački svog domena.

Primjer 26 : Za funkciju $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ posmatrajmo granični proces kada $(x,y) \to (1,1)$.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{1+1}{1^2+1^2} = 1 = f(1,1) \ .$$

Kako je $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, tačka $X(1,1) \in D_f$, te je racionalna funkcija neprekidna u toj tački. Generalno, ako tačka $X(x_0,y_0) \in D_f$, tada zbog neprekidnosti vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x_0+y_0}{x_0^2+y_0^2} = f(x_0,y_0) \ .$$

Teorem 2.3.3. *Neka su funkcije $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidne u tački $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Tada su u toj tački* *neprekidne i funkcije* $f \pm g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(\boldsymbol{a}) \neq 0)$ *i* kf *(*k *proizvoljan skalar iz* $\mathbb{R}$*).*

Teorem 2.3.4. *Neka je* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija u tački* $\boldsymbol{a}$ *i neka je* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija, tada je i* $h \circ f$ *neprekidna funkcija u tački* $\boldsymbol{a}$*.*

PRIMJER 27 : Kako je funkcija $h(t) = \sin t$ neprekidna za proizvoljno t iz $\mathbb{R}$ i kako je funkcija

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

neprekidna za sve tačke $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ kao polinomijalna funkcija, onda je i funkcija

$$h(f(x, y, z)) = \sin(x^2 + y^2 + z^2),$$

neprekidna u svim tačkama iz $\mathbb{R}^3$, na osnovu gornjeg teorema.

PRIMJER 28 : Korjena funkcija je neprekidna na svom domenu, pa je i kompozicija korijene i polinomijalne funkcije neprekidna funkcija na svom domenu (Teorem 2.3.4). Prema prethodnom primjeru (samo za funkciju dvije varijable), funkcija

$$h(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$$

je neprekidna za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Takođe je neprekidna i funkcija

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zaključujemo onda, na osnovu Teorema 2.3.3, da je i funkcija

$$f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ ,$$

neprekidna u svakoj tački iz $\mathbb{R}^2$, različitoj od tačke $\mathbf{0} = (0, 0)$. Tačka $(0, 0)$ nije u domenu posmatrane funkcije, pa o neprekidnosti u toj tački nema smisla ni govoriti.
Međutim,

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}))}{d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \ .$$

Dakle, o vrijednosti funkcije u tački $(0, 0)$ bi ipak mogli govoriti na neki način. Naime, ako definišemo novu funkciju

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & ; \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \ ,$$

onda je ona neprekidna u svim tačkama $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ali nam je jasno da $F(x, y) \neq f(x, y)$ jer nemaju iste domene.

U tačkama u kojima funkcija nije definisana (tačke koje ne pripadaju domenu funkcije) ne razmatramo osobinu neprekidnosti. U tim tačkama ne znamo vrijednost funkcije, a time ne možemo ni crtati graf funkcije, što znači da u tim tačkama imamo "geometrijski" prekid grafa funkcije. Kao što vidimo u prethodnom primjeru, ponekad posmatranu funkciju možemo dodefinisati u takvim tačkama i dobiti novu funkciju koja je neprekidna i u tim tačkama. Takve tačke se u tom slučaju nazivaju *otklonjivi prekidi.*

Definicija 2.3.3. *Linija ili površ koja predstavlja skup tačaka prekida funkcije* f *naziva se linijom ili površinom prekida funkcije.*

Ako je funkcija f neprekidna u oblasti D, ona je neprekidna po svakoj liniji i po svakoj površi koja leži u toj oblasti. Ako specijalno posmatramo prave paralelne koordinatnim osama, to onda znači da je funkcija neprekidna po svakoj varijabli posebno. Međutim obrat ne važi, to jest funkcija može biti neprekidna po svakoj varijabli posebno ali da ipak ima prekide. Na primjer, funkcija

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

je u tački $\mathbf{0} = (0,0)$ neprekidna po svakoj varijabli, ali granična vrijednost (simultana) u tački $\mathbf{0}$ ne postoji (Primjer 24), to jest funkcija ima prekid u toj tački.

PRIMJER 29 : $f(x,y) = \dfrac{e^x + e^y}{x^2+y^2-1}$.
Linija prekida ove funkcije je kružnica $x^2 + y^2 = 1$.

PRIMJER 30 : $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)}$.
Površ prekida funkcije je sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Dio o neprekidnosti završimo sa dva važna stava, koji opet predstavljaju analogone odgovarajućih tvrđenja za funkcije jedne varijable.

Teorem 2.3.5. *Svaka funkcija koja je neprekidna u zatvorenoj i ograničenoj oblasti je ograničena u toj oblasti.*

Teorem 2.3.6. *Ako je f neprekidna u proizvoljnoj oblasti i ako za $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ iz te oblasti vrijedi $f(\boldsymbol{x}_1) \neq f(\boldsymbol{x}_2)$, tada za proizvoljno c između $f(\boldsymbol{x}_1)$ i $f(\boldsymbol{x}_2)$, postoji tačka $\boldsymbol{x}$ u toj oblasti takva da je $f(\boldsymbol{x}) = c$.*