Sadržaj

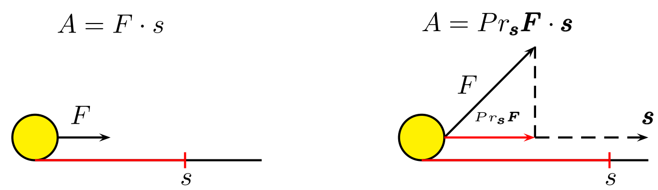
Poglavlje 6 Krivolinijski integral

Pojam određenog integrala, definisanog na nekom segmentu realne prave, u prethodnoj smo glavi uopštili proširujući integraciju na oblast u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ prostoru. Sada ćemo uopštavanje izvršiti u drugom pravcu. Naime, ako za oblast integracije ne posmatramo segment prave linije, nego luk proizvoljne krive u prostoru, a podintegralna funkcija se definiše na tom luku, dolazimo do pojma krivolinijskog integrala.
Krivolinijski integral se koristi, kako u matematici, tako i u raznim primjenama (izračunavanje rada sile na putu, cirkulacija fluida, izračunavanje mase tijela itd.). Uobičajeno se razmatraju dvije vrste krivolinijskih integrala, krivolinijski integral prve i krivolinijski integral druge vrste i mi ćemo ovdje uraditi isto uz napomenu da su sva razmatranja izvedena u prostoru $\mathbb{R}^3$.

6.1 Motivacija za krivolinijski integral

Fizikalna motivacija

Neka sila konstantnog intenziteta F djeluje na objekat u pravcu njegovog kretanja duž prave linije i neka se pri tome objekat pomjeri za dužinu s. Veličinu Fs nazivamo rad sile F na putu s i označavamo je sa A (Slika 6.1 a)).



(a) Rad sile u pravcu kretanja (b) Rad sile pod uglom

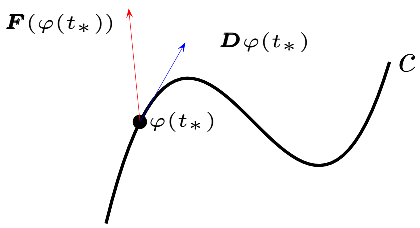
Slika 6.1: Rad sile na pravolinijskom putu

Opštije, ukoliko sila konstantnog intenziteta $\boldsymbol{F}$ djeluje pod nekim uglom na objekat koji se kreće pravolinijski, tada se rad ostvaruje silom čiji je intenzitet projekcija sile $\boldsymbol{F}$ na vektor kretanja $\boldsymbol{s}$ (Slika 6.1 b)).

Uopštimo dalje razmatranje tako što ćemo posmatrati kretanje objekta po proizvoljnoj putanji c, na kojeg djeluje sila ovisna o trenutnoj poziciji objekta na putanji. U trenutku t_*, objekat se kreće u pravcu $\boldsymbol{D}\varphi(t_*)$, a na njega djeluje sila $\boldsymbol{F}(\varphi(t_*))$.

U opštem slučaju, silu $\boldsymbol{F}$ reprezentuje funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (vektorsko polje). Kriva po kojoj se objekat kreće je jednodimenzionalni objekat u prostoru i kao takva, može se predstaviti funkcijom jedne varijable $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, koju nazivamo *parametrizacija krive* c i za koju pretpostavljamo da je glatka kriva.

Za izračunati rad koji izvrši sila $\boldsymbol{F}$ kada se objekat pomjeri iz tačke $\varphi(a)$ u tačku $\varphi(b)$, prvo



Slika 6.2: Kretanje objekta duž krive c pod djelovanjem sile $\boldsymbol{F}$

interval $[a,b]$ podijelimo na m podintervala dužine

$$\triangle t = \frac{b-a}{m} \ ,$$

(podjela ne mora biti ravnomjerna) tačkama $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b$. Sada, u trenutku t_k $(k = 0,1,...,m-1)$, objekat se kreće u pravcu $\boldsymbol{D}\varphi(t_k) = \varphi'(t_k)$, brzinom $||\boldsymbol{D}\varphi(t_k)||$ i prelazi put $||\boldsymbol{D}\varphi(t_k)||\triangle t$ do trenutka t_{k+1}. Označimo li sa A_k rad sile $\boldsymbol{F}$ na putu od $\varphi(t_k)$ do $\varphi(t_{k+1})$, imamo

$$A_k \approx \boldsymbol{F}(\varphi(t_k)) \cdot \boldsymbol{D}\varphi(t_k)\triangle t \ .$$

Naravno, sada je rad na putu od $\varphi(a)$ do $\varphi(b)$ dat sa

$$A \approx \sum_{i=0}^{m-1} A_k = \sum_{i=0}^{m-1} \boldsymbol{F}(\varphi(t_k)) \cdot \boldsymbol{D}\varphi(t_k)\triangle t \ .$$

Puštajući da m neograničeno raste (sve sitnije i sitnije podjele), dobijamo

$$A = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \boldsymbol{F}(\varphi(t_k)) \cdot \boldsymbol{D}\varphi(t_k)\triangle t = \int_a^b \boldsymbol{F}(\varphi(t)) \cdot \boldsymbol{D}\varphi(t)dt \ .$$

6.2 Krivolinijski integral prve vrste

Posmatrajmo u prostoru $Oxyz$ dio krive L od tačke A do tačke B, koja se može rektificirati i koja nema samopresjeka. Neka su njene jednačine date sa

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ z = z(t) \quad ; \quad t \in [\alpha,\beta] \ . \tag{6.1}$$

Neka je funkcija $f(x,y,z)$ (skalarno polje) definisana i ograničena na krivoj L. Podijelimo segment $[\alpha,\beta]$ na n dijelova, $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$. Svakoj vrijednosti t_i, $i = 1,2,...,n$ odgovara na krivoj tačka A_i čije su koordinate (x_i,y_i,z_i), gdje je $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ i $z_i = z(t_i)$. Specijalno, za $t = t_0$ imamo tačku $A(x_0,y_0,z_0)$ i za $t = t_n$ tačku $B(x_n,y_n,z_n)$. Na svakom segmentu $[t_{i-1},t_i]$ izaberimo proizvoljnu vrijednost τ_i parametra t. Ovoj vrijednosti odgovara tačka $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ krive L, pri čemu je

$$\xi_i = x(\tau_i) \ , \ \eta_i = y(\tau_i) \ , \ \zeta_i = z(\tau_i) \ ; \ i = 1,2,...,n \ .$$

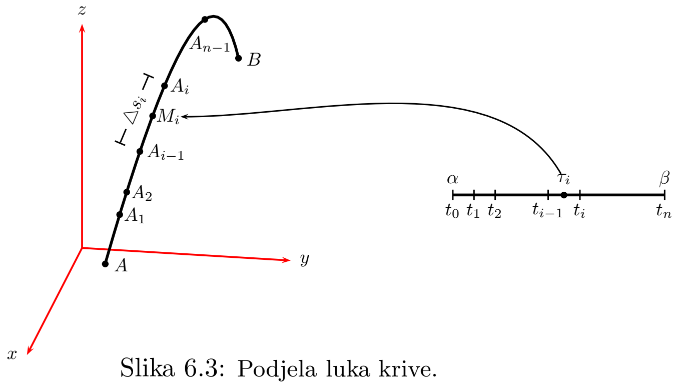
Sa Δs_i označimo dužinu luka $A_{i-1}A_i$ krive L. Posmatrajmo sljedeću integralnu sumu

$$\sigma(f,L) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i \tag{6.2}$$

Za broj I kažemo da je limes integralne sume $\sigma(f,L)$ kada $\max \Delta s_i$ teži 0, u oznaci

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma(f,L) = I \ ,$$

ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$, tako da je $|\sigma(f,L) - I| < \varepsilon$ za $\max \Delta s_i < \delta$ i za proizvoljan izbor tačaka (ξ_i,η_i,ζ_i) na luku $A_{i-1}A_i$.



Slika 6.3: Podjela luka krive.

Definicija 6.2.1. *Ako za funkciju* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*, definisanu i ograničenu na luku* $L = \widehat{AB}$*, postoji* $\lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma(f, L) = I$*, onda se* I *naziva krivolinijski integral prve vrste funkcije* $f(x, y, z)$ *po krivoj* L *i označava se sa*

$$I = \int\limits_L f(x, y, z)ds \quad \text{ili} \quad I = \int\limits_{AB} f(x, y, z)ds \ .$$

Često ćemo umjesto o krivoj integracije govoriti o luku ili putanji integracije i nadalje ćemo podrazumijevati da je L dio-po-dio glatka kriva, a da je $f(x, y, z)$ ograničena na L i neprekidna u svim tačkama krive L, osim u njih konačno mnogo. Ove posljednje pretpostavke su ustvari neophodni uslovi postojanja krivolinijskog integrala prve vrste. Sljedećim teoremom navodimo neke od osnovnih svojstava ovog integrala.

Teorem 6.2.1. ***Adiotivnost i homogenost po podintegralnoj funkciji***
Neka je $L = \widehat{AB} \subset \mathbb{R}^3$ *dio-po-dio glatka kriva bez samopresjeka i neka su* f *i* g *funkcije definisane na luku* L *tako da integrali* $\int\limits_L f(x, y, z)ds$ *i* $\int\limits_L g(x, y, z)ds$ *postoje. Za* $a, b \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\int\limits_L (af(x, y, z) + bg(x, y, z))ds = a\int\limits_L f(x, y, z)ds + b\int\limits_L g(x, y, z)ds \ .$$

Dokaz : Dokaz ove činjenice slijedi direktno iz osobina konačnih suma.

$$\sum_{i=1}^{n} [af(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) + bg(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] \Delta s_i = a\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i + b\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i \ .$$

Prelaskom na limes kada $\max \Delta s_i \to 0$ dobija se tvrdnja. ∎

Teorem 6.2.2. ***Aditivnost po luku integracije***
Neka je $L = \widehat{AB} \subset \mathbb{R}^3$ *dio-po-dio glatka kriva bez samopresjeka. Za proizvoljnu tačku* C *luka* L*, između tačaka* A *i* B *vrijedi*

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)ds = \int\limits_{AC} f(x, y, z)ds + \int\limits_{CB} f(x, y, z)ds \ .$$

Dokaz : Pri podjeli luka AB tačkama A_i, kao jednu od podionih tačaka izaberimo i tačku C i fiksirajmo je. Integralna suma $\sigma(f, L)$ može se simbolički zapisati u obliku

$$\sigma(f, L) = \sum_{AC} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i + \sum_{CB} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i \ ,$$

gdje podrazumijevamo da u prvoj sumi sumiramo po onim tačkama A_i koje su na luku AC, a u drugoj sumi po tačkama koje su na luku CB. Prelaskom na limes kada $\max \Delta s_i \to 0$ dobija se tražena tvrdnja. ■

Teorem 6.2.3. *Neka je $L = \widehat{AB} \subset \mathbb{R}^3$ dio-po-dio glatka kriva bez samopresjeka i neka su dalje f i g funkcije definisane na luku L tako da integrali $\int_L f(x,y,z)ds$ i $\int_L g(x,y,z)ds$ postoje.*

1. $\left|\int_L f(x,y,z)ds\right| \le \int_L |f(x,y,z)|ds.$
2. *Ako je $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ za $(x,y,z) \in L$, onda je*
$$\int_L f(x,y,z)ds \le \int_L g(x,y,z)ds \ .$$

Dokaz :

1. Slijedi iz uopštene nejednakosti trougla
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)|\Delta s_i \ .$$
2. Iz nejednakosti $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) \le g(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, $i = 1,2,...,n$, slijedi $\sigma(f,L) \le \sigma(g,L)$, što direktno daje traženo tvrđenje.

■

Teorem 6.2.4. *Neka je $f(x,y,z)$ neprekidna funkcija na luku L. Postoji $M^*(x^*,y^*,z^*)$ na luku L, takva da vrijedi*
$$\int_L f(x,y,z)ds = f(x^*,y^*,z^*) \cdot l(L) \ ,$$
gdje smo sa $l(L)$ označili dužinu luka L.

Jedna od važnijih osobina krivolinijskog integrala prve vrste iskazana je slijedećim teoremom.

Teorem 6.2.5. *Ako postoji $\int_{AB} f(x,y,z)ds$, onda vrijedi*
$$\int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{BA} f(x,y,z)ds \ .$$

Dokaz : Dokaz slijedi iz činjenice da veličina Δs_i predstavlja dužinu luka od tačke A_{i-1} do tačke A_i, pa je očigledno svejedno da li tu dužinu posmatramo od A_{i-1} do A_i ili od A_i do A_{i-1}. ■

6.2.1 Izračunavanje krivolinijskog integrala prve vrste

Sljedećim teoremom dajemo pravilo za izračunavanje krivolinijskog integrala prve vrste.

Teorem 6.2.6. *Neka je luk krive* $L = \widehat{AB}$ *zadat jednačinama*

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ ;\ t \in [\alpha, \beta]\ ,$$

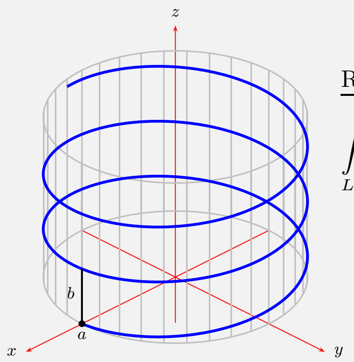
dio-po-dio glatka kriva bez samopresjeka i neka je $f(x, y, z)$ *neprekidna funkcija na luku* L. *Tada vrijedi formula*

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt\ . \tag{6.3}$$

Vidimo da se u stvari krivolinijski integral prve vrste, ako je luk L zadat parametarskim jednačinama, svodi na obični Riemanov integral jedne varijable.

PRIMJER 1 : Izračunati $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)ds$, gdje je luk L zadat parametarskim jednačinama kružne zavojnice

$$L:\ x = a\cos t\ ,\ y = a\sin t\ ,\ z = bt\ ;\ t \in [0, \pi]\ .$$



Rješenje: Na osnovu formule 6.3 imamo

$$\begin{aligned}\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)ds &= \int_0^\pi (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\ dt\\ &= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^\pi (a^2 + b^2t^2)dt\\ &= \left(\pi a^2 + \frac{1}{3}\pi^3 b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

PRIMJER 2 : Izračunati: $\int\limits_{AB} (x + y + z)ds$, gdje je luk dio prave od tačke $A(1, 1, 1)$ do tačke $B(3, 3, 3)$.

Rješenje: Jednačina prave zadata tačkama A i B je $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ ili u parametarskom obliku $x = 2t + 1\ ,\ y = 2t + 1\ ,\ z = 2t + 1$, gdje je $t \in [0, 1]$. Na osnovu formule 6.3 imamo

$$\begin{aligned}\int\limits_{AB} (x+y+z)ds &= \int_0^1 (2t+1+2t+1+2t+1)\sqrt{12}\ dt\\ &= 2\sqrt{3}\int_0^1 (6t+3)dt\\ &= 12\sqrt{3}\end{aligned}$$

6.3 Krivolinijski integral druge vrste

Neka je kriva L u prostoru data jednačinama

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ ;\ t \in [\alpha, \beta]$$

i neka su funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ definisane i ograničene na luku L. Podjelimo segment $[\alpha, \beta]$ na n dijelova tačkama t_i i na svakom podsegmentu $[t_{i-1}, t_i]$ izaberimo proizvoljnu vrijednost τ_i, $i = 1, 2, ..., n$. Vrijednostima t_i odnosno τ_i odgovaraju tačke $A_i(x_i, y_i, z_i)$, odnosno $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, pri čemu je $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, $z_i = z(t_i)$, $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$ i $\zeta_i = z(\tau_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Uvedimo još oznake $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ i $\Delta z_i = y_i - y_{i-1}$.

Sada možemo formirati slijedeće integralne sume

$$\sigma_1(P, L) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i \ ,$$

$$\sigma_2(Q, L) = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i \ ,$$

$$\sigma_3(R, L) = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i \ .$$

Definicija 6.3.1. *Neka za funkciju $P(x, y, z)$ ($Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$), definisanu na luku L, postoji limes integralne sume $\sigma_1(P, L)$ ($\sigma_2(Q, L)$, $\sigma_3(R, L)$) kada $\max \Delta x_i \to 0$ ($\max \Delta y_i \to 0$, $\max \Delta z_i \to 0$), tada se on naziva krivolinijskim integralom druge vrste funkcije $P(x, y, z)$ ($Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$) po luku L i označava se sa*

$$\int_L P(x, y, z)dx \quad \left(\int_L Q(x, y, z)dy \ , \ \int_L R(x, y, z)dy \right) \ .$$

Zbir $\int_L P(x, y, z)dx + \int_L Q(x, y, z)dy + \int_L R(x, y, z)dy$ *se obično zapisuje u skraćenoj formi*

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dy$$

i naziva se (opštim) krivolinijskim integralom druge vrste.

Neka je zadato vektorsko polje $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, prema definiciji krivolinijskog integrala vidimo da je

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dy = \int_L \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{x},$$

gdje je $d\boldsymbol{x} = (dx, dy, dz)$. Za razliku od krivolinijskog integrala prve vrste gdje pod integralom skalarno polje $f(x, y, z)$ množimo sa elementom luka krive ds, kod krivolinijskog integrala druge vste pod integralom imamo skalarni proizvod dva vektora, skalarnog polja $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ i priraštaja tačke $d\boldsymbol{x}$ na luku L.

Narednim teoremama dajemo osobine krivolinijskog integrala druge vrste za koje primjećujemo da su ekvivalentne osobinama krivolinijskog integrala prve vrste.

Teorem 6.3.1. ***Aditivnost i homogenost po podintegralnoj funkciji***
Neka je $L = AB$ luk krive, P i P_1 funkcije definisane na luku L i neka postoje integrali $\int_L P(x, y, z)dx$ *i* $\int_L P_1(x, y, z)dx$. *Za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\int_L (aP(x, y, z) + bP_1(x, y, z))dx = a \int_L P(x, y, z)dx + b \int_L P_1(x, y, z)dx \ .$$

Teorem 6.3.2. ***Aditivnost po luku integracije***

Neka je $L = AB$ luk krive i neka je $C \in L$ između tačaka A i B. Tada vrijedi

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{AC} P(x,y,z)dx + \int_{CB} P(x,y,z)dx \ .$$

Teorem 6.3.3. *Ako je $P(x,y,z)$ neprekidna funkcija na luku AB, onda postoji tačka $M^*(x^*,y^*,z^*)$ na luku AB, takva da je*

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = P(x^*,y^*,z^*)(b-a) \ ,$$

gdje je $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Sada ćemo vidjeti da slijedeće svojstvo nije jednako kod krivolinijskih integrala prve i druge vrste.

Teorem 6.3.4. *Ako postoji integral $\int_{AB} P(x,y,z)dx$, tada vrijedi*

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = -\int_{BA} P(x,y,z)dx \ .$$

Dokaz : Ostavljeno čitaocu za vježbu. ■

6.3.1 Izračunavanje krivolinijskog integrala druge vrste

Teorem 6.3.5. *Neka je kriva AB zadata jednačinama*

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ z = z(t) \ ; \ t \in [\alpha, \beta] \ ,$$

dio-po-dio glatka kriva bez samopresjeka i neka je funkcija $P(x,y,z)$ neprekidna na luku AB. Tada važi formula

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_\alpha^\beta P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t)dt \ . \tag{6.4}$$

Analogno se iskazuje tvrdnja i za funkcije Q i R, to jest

$$\int_{AB} Q(x,y,z)dx = \int_\alpha^\beta Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot y'(t)dt \ ,$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)dx = \int_\alpha^\beta R(x(t),y(t),z(t)) \cdot z'(t)dt \ .$$

Sada za sumarnu formulu krivolinijskog integrala druge vrste imamo

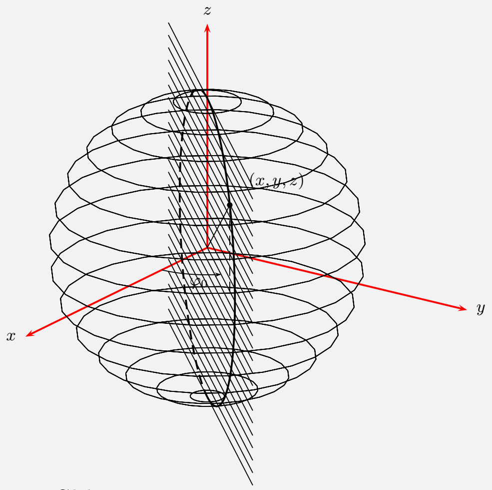
$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))dt \ . \tag{6.5}$$

Primjer 3 : Izračunati: $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, gdje je L luk parabole $y = x^2$, od tačke $A(-1,1)$ do tačke $B(1,1)$.

Za parametar krive uzimamo x. Formula 6.5 nam daje $(R = 0)$

$$\begin{aligned}\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx \\ &= -\frac{14}{15} \; .\end{aligned}$$

Primjer 4 : Izračunati: $\int_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dy$, gdje je L kružnica određena sferom $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i ravni $y = x$. Pri tome je smjer integracije suprotan kretanju kazaljke na satu, ako se gleda iz pozitivnog dijela x-ose.



Slika 6.4: Presjek svere i ravni.

Za parametar očigledno možemo izabrati ugao između radijus-vektora tačke na kružnici i ekvatorijalne ravni. Iz sfernih koordinata onda imamo

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cos t \; , \; y = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cos t \; , \; z = a\sin t,$$

pri čemu se zbog zadate orijentacije, parametar t mijenja od 0 do 2π. Sada na osnovu formule 6.5 imamo

$\int_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dy =$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \sin t)\sin t - \frac{a^2\sqrt{2}}{2}(\sin t - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t)\sin t \right] dt \\ &= 0 \; .\end{aligned}$$

6.4 Nezavisnost integracije od putanje. Greenova formula

Krivolinijski integral druge vrste u opštem slučaju zavisi od putanje po kojoj se vrši integracija (Teorem 6.3.4). Međutim, to nije uvijek slučaj. Ukoliko izraz $Pdx + Qdy + Rdz$ predstavlja totalni diferencijal neke funkcije tri promjenljive $u(x, y, z)$, to jest

$$du(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \; ,$$

onda integral vektora $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ po luku $L = \widehat{AB}$ zavisi samo od tačaka A i B, a ne i od linije kojom su te tačke povezane. Ovo razmatranje ćemo iskazati teoremom,

Teorem 6.4.1. *Neka je u oblsti $V \subset \mathbb{R}^3$ zadata neprekidna vektorska funkcija*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \ .$$

Tada su sljedeća tvrđenja ekvivalentna:

1. *Postoji funkcija $u(x,y,z)$ sa neprekidnim prvim parcijalnim izvodima, definisana u oblasti V, takva da je*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z) \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z) \ , \ \frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z) \ .$$

2. *Krivolinijski integral druge vrste $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ po putanji $AB \subset V$, gdje su $A(x_0,y_0,z_0)$ i $B(x_1,y_1,z_1)$ početna, odnosno krajnja tačka te putanje, ne zavisi od oblika putanje, nego samo od tačaka A i B. Pri tome vrijedi*

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(x_1,y_1,z_1) - u(x_0,y_0,z_0) \ .$$

3. *Krivolinijski integral*

$$\oint\limits_{c} Pdx + Qdy + Rdz$$

po proizvoljnoj zatvorenoj putanji $c \subset V$ jednak je nuli.

Na osnovu gornjeg teorema jasno je da se problem izračunavanja krivolinijskog integrala druge vrste, kada on ne ovisi o putu integracije, svodi na raspoznavanje kada je podintegralna funkcija totalni diferencijal neke vektorske funkcije. Zato nam je od interesa dati još neki kriterijum za takvo "raspoznavanje". Za naredni teorem neophodan nam je slijedeći pojam.

Definicija 6.4.1. *Za oblast $V \subset \mathbb{R}^3$ kažemo da je prosto povezana ako se svaka zatorena dio-po-dio glatka kriva $c \subset V$, može "stegnuti" u proizvoljnu tačku $M_0 \in c$, ostajući pri tome u oblasti V.*

Strogu matematičku formulaciju pojma "stegnuti" ovdje nećemo razmatrati. Neka on ostane u domenu intuitivnog, ali navedimo neke primjere prosto povezanih i nepovezanih oblasti. Unutrašnjost proizvoljnog kruga i kvadrata su prosto povezane oblasti u $\mathbb{R}^2$, ali krug bez svog centra ili dvije koncentrične kružnice to nisu. U $\mathbb{R}^3$ primjer prosto povezane oblasti su lopta i kocka, takođe i oblast ograničena dvjema koncentričnim sferama. Torus je primjer oblasti u $\mathbb{R}^3$ koja nije prosto povezana.

Teorem 6.4.2. *Neka je u prosto povezanoj oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$ zadata neprekidna vektorska funkcija $\overrightarrow{v} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ koja ima neprekidne parcijalne izvode $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$ i $\frac{\partial R}{\partial y}$. Potreban i dovoljan uslov da integral $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$, $AB \subset V$, ne zavisi od putanje AB, jeste da su ispunjeni uslovi*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ , \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \ , \ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \ .$$

Primjer 5 : Izračunati:

$$\oint_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\ ,$$

po putanji c koja predstavlja kružnicu $(x-3)^2+y^2=1$.

Rješenje: Kako su $P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ i $Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ neprekidne u oblasti ograničenoj krivom c (posmatrana oblast ne sadrži tačku $(0,0)$) i kako su

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

i uz to neprekidne funkcije u istoj oblasti, to na osnovu Teorema 6.4.1 zaključujemo da je dati integral jednak 0.

Primjer 6 : Izračunati:

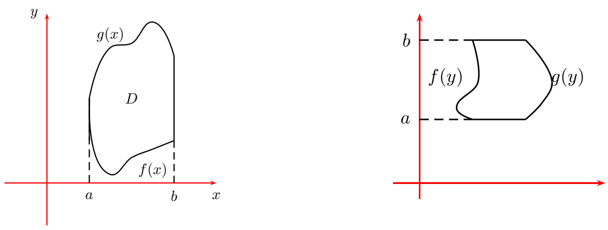
$$\oint_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\ ,$$

po putanji c koja predstavlja kružnicu $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $t\in[0,2\pi]$.

Rješenje: Za razliku od gornjeg primjera, ovdje su funkcije P,Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidne u svim tačkama oblasti ograničenom krivom c osim u tački $(0,0)$, koja se nalazi unutar te oblasti. Naravno, mogli bi ne posmatrati tu tačku, ali oblast datog kruga bez tačke $(0,0)$ nije onda prosto povezana pa se ne možemo pozvati na prethodna dva teorema. Zato izračunavanju ovog integrala pristupamo na klasičan način.

$$\begin{aligned}\oint_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{-a\sin t}{a^2}(-a\sin t)+\frac{a\cos t}{a^2}a\cos t\right)dt\\ &= 2\pi\ .\end{aligned}$$

Veza između dvojnog integrala po nekoj oblasti i krivolinijskog integrala po granici te oblasti data je poznatom *Greenovom formulom.* Uočimo prostu zatvorenu krivu $c\subset\mathbb{R}^2$ koja ograničava oblast D. Ako se c sastoji od dijelova grafika dviju neprekidnih funkcija f i g, definisanih na $[a,b]$ i takvih da je $f(x)\le g(x)$ za $x\in[a,b]$, i eventualno dijelova pravih $x=a$ i $x=b$, onda ćemo oblast D nazvati elementarnom oblašću u odnosu na osu Ox. Na sličan bi način definisali elementarnu oblast u odnosu na osu Oy. Oblasti koje su elementarne u odnosu na obje ose zovemo prosto elementarnim oblastima.



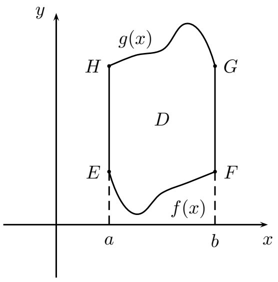
(a) Elementarna oblast u odnosu na Ox (b) Elementarna oblast u odnosu na Oy

Teorem 6.4.3. ***Greenov teorem***
Neka je $D\subset\mathbb{R}^2$ oblast ograničena dio-po-dio glatkom krivom c. Ako su funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, na zatvorenoj oblasti $\overline{D}$, tada važi jednakost

$$\oint_{c^+} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_{\overline{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\ . \tag{6.6}$$

Pri tome, oznaka c^+ u krivolinijskom integralu označava da se integracija vrši u smjeru pri kome tačke oblasti D uvijek ostaju s lijeve strane u odnosu na kretanje.

Dokaz : Pretpostavimo za početak da je oblast D elementarna oblast u odnosu na Ox osu. Dakle, neka je granica oblasti D kriva c određena jednačinama $y = f(x)$, $y = g(x)$ ($f(x) \leq g(x)$ za $a \leq x \leq b$), zatim sa $x = a$ i $f(a) \leq y \leq g(a)$, kao i $x = b$, $f(b) \leq y \leq g(b)$, što je predstavljeno slikom



Sada imamo,

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy = \int_a^b \left(P(x,g(x)) - P(x,f(x))\right) dx$$

$$= \int_a^b P(x,g(x))dx - \int_a^b P(x,f(x))dx = -\int\limits_{GH} P(x,y)dx - \int\limits_{EF} P(x,y)dx \ .$$

Uzimajući u obzir da na pravama $x = a$ i $x = b$ vrijedi $dx = 0$, imamo

$$\int\limits_{HE} P(x,y)dx = 0 \quad , \quad \int\limits_{FG} P(x,y)dx = 0 \ ,$$

pa zajedno sa prethodnim vrijedi

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{GH} P(x,y)dx - \int\limits_{HE} P(x,y)dx - \int\limits_{EF} P(x,y)dx - \int\limits_{FG} P(x,y)dx \ ,$$

odnosno

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_{c^+} P(x,y)dx \ .$$

Na sličan način bi dobili

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{c^+} Q(x,y)dy \ .$$

Sabiranjem posljednje dvije jednakosti dobijamo traženu formulu

$$\oint\limits_{c^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy \ .$$

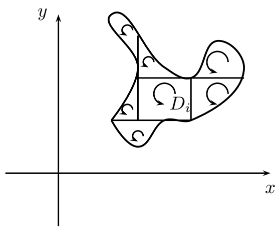
Ako oblast D nije elementarna, onda je prvo pravim linijama paralelnim koordinatnim osama podijelimo na elementarne oblasti D_i, $i = 1, 2, ..., n$, što je prikazano na slici (6.5).

Nakon toga na svaku podoblast D_i primjenimo dobijenu jednakost

$$\oint\limits_{c_i^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D_i} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy \ ,$$

gdje je c_i granica oblasti D_i. Sabiranjem ovih jednakosti po $i = 1, 2, ..., n$, dobijamo formulu

$$\oint\limits_{c^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy \ .$$



Slika 6.5: Podjela oblasti na elementarne oblasti.

Pri tome treba uočiti da se krivolinijski integral druge vrste po onim granicama susjednih oblasti koje su im zajedničke, i nalaze se unutar oblsti D, pojavljuje uvijek dva puta i to krećući se suprotnim smjerovima, pa se svi ti integrali poništavaju zbog poznate nam osobine krivolinijskog integrala druge vrste. ■

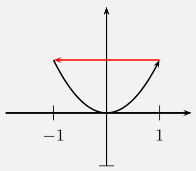
U sljedećem primjeru ilustrovat ćemo primjenu Greenovog teorema u izračunavanju krivolinijskih integrala.

PRIMJER 7 : Izrčunati:

$$\int_c \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy \ ,$$

gdje je c luk parabole $y = x^2$, od tačke $A(-1,1)$ do tačke $B(1,1)$.

Rješenje:



Oblast D koju posmatramo u Greenovom teoremu je zatvorena i ograničena, pa je linija c koja je ograničava, zatvorena linija. Dakle, da bi mogli primjeniti Greenovu teoremu, neophodno je da putanja integracije bude zatvorena kontura, što u našem primjeru nije slučaj.

S druge strane, motiv za primjenu Greenove teoreme je činjenica da vrijedi uslov

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ ,$$

jer je u tom slučaju izraz na desnoj strani u (6.6) jednak 0. Kod nas je taj uslov zadovoljen, to jest vrijedi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ ,$$

a to znači da bi bilo dobro iskoristiti Greenov teorem. U tom cilju našu putanju integracije (dio parabole), zatvorimo proizvoljnom krivom (zatvaranje treba izvesti sa krivom po kojoj je krivolinijska integracija jednostavna). Neka to bude prava koja spaja tačke A i B, tojest linija

$$l: \quad y = 1 \ , \ -1 \le x \le 1 \ .$$

Sada je $c \cup l$ zatvorena putanja, pa vrijedi

$$\int_{c\cup l} \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0 \ .$$

S druge strane, prema pravilima za krivolinijski integral druge vrste, imamo

$$\int_{c\cup l} \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_c \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy + \int_l \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy \ .$$

Iz posljednje dvije jednakosti onda vrijedi

$$\int\limits_c \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = -\int\limits_l \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy \ .$$

Kako je na krivoj l, $y=1$, odnosno $dy=0$, onda je

$$\int\limits_l \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = arctgx\,\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \ .$$

Dakle,

$$\int\limits_c \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = -\frac{\pi}{2} \ .$$

Izvedimo i jednu primjenu krivolinijskog integrala druge vrste i Greenovog teorema. Ona se odnosi na izračunavanje površine ravnog lika.

PRIMJER 8 : Neka je D zatvorena oblast u ravni Oxy, ograničena dio-po-dio glatkom krivom c. Poznato nam je da vrijedi

$$mes(D) = \iint\limits_D dxdy \ .$$

S druge strane, koristeći Greenovu formulu, uzimajući $P(x,y)=0$ i $Q(x,y)=x$, dobijamo vezu

$$\iint\limits_D dxdy = \oint\limits_{c^+} xdy \ .$$

Ako uzmemo $P(x,y)=-y$ i $Q(x,y)=0$, dobija se

$$\iint\limits_D dxdy = -\oint_{c^+} ydx \ .$$

Objedinjujući gornje, dobijamo formulu za izračunavanje površine ravne figure

$$mes(D) = \iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_{c^+} xdy - ydx \ .$$