Sadržaj

Poglavlje

5 Višestruki integrali

U ovom poglavlju bavit ćemo se konceptom određenog integrala za funkcije više varijabli i to uglavnom za funkcije dvije i tri varijable.

Funkciju jedne varijable smo integrirali duž nekog segmenta, dok će integracija funkcije dvije varijable biti nad oblašću u 2D prostoru, a integracija funkcije tri varijable će biti nad nekom zapreminom u 3D prostoru. Pored tehnika izračunavanja ovih integrala, prezentovaćemo i primjene ovih integrala za računanje površina ravnih likova, zapremina, kao i neke fizikalne interpretacije.

5.1 Integralne sume

Posmatrajmo proizvoljnu oblast D u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Pod terminom "oblast" uobičajeno podrazumijevamo ograničen i zatvoren podskup prostora $\mathbb{R}^n$. Sa $mes(D)$ ćemo označavati mjerni broj veličine oblasti D (u slučaju dvodimenzionalne oblasti to je površina, za trodimenzionalnu oblast to je zapremina). Kao prvo, definišimo pojam podjele oblasti.

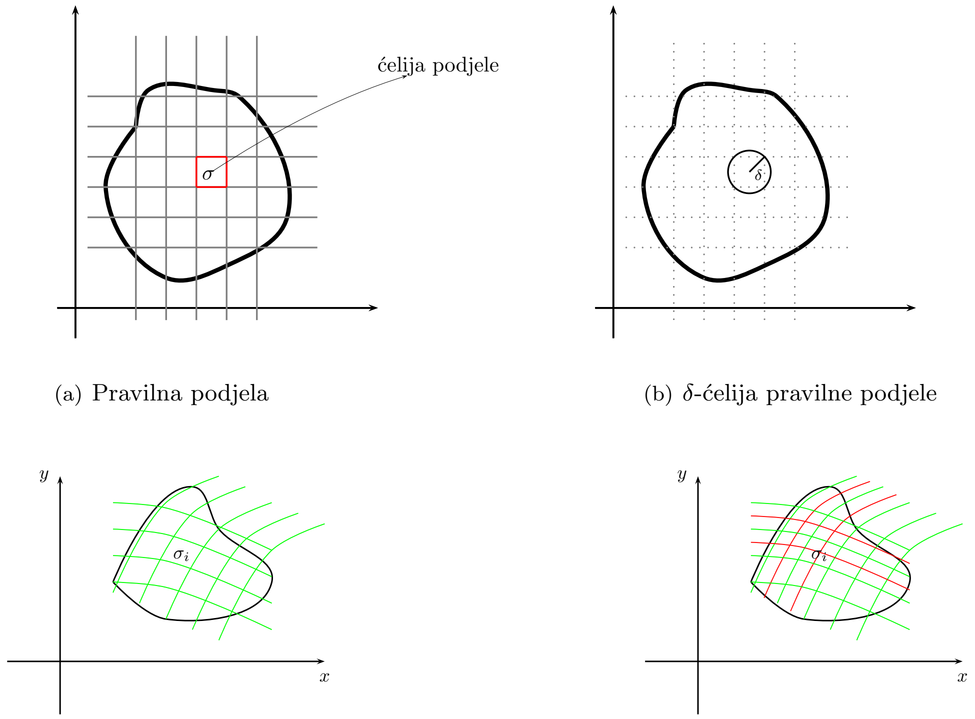
Definicija 5.1.1. *Podjelu oblasti D nazivamo pravilnom ako se sastoji od dijelova, koje nazivamo ćelije, te oblasti koji zadovoljavaju sljedeće osobine:*

1. *Svaka ćelija je ograničena i ima ograničenu veličinu.*
2. *Dvije različite ćelije nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka. Zajedničke tačke dviju različitih ćelija mogu biti samo granične tačke tih ćelija.*
3. *Svaka tačka oblasti D pripada bar jednoj ćeliji.*
4. *Svaka ograničena figura koja sa svojom granicom leži u oblasti D može se sastojati samo iz konačnog broja ćelija.*

Definicija 5.1.2. *Ćeliju jedne podjele nazivamo δ-ćelijom ako oko nje možemo opisati sferu poluprečnika δ. Pravilna podjela se naziva δ-podjelom ako je svaka njena ćelija δ-ćelija.*

Jasno je da su u jednoj δ-ćeliji bilo koje dvije tačke na rastojanju manjem ili jednakom 2δ. Podjele ćemo ozanačavati uobičajeno sa σ. Različite podjele iste oblasti mogu se porediti ili biti neuporedive.

Definicija 5.1.3. *Podjela σ_2 je produženje podjele σ_1 ako pri prelazu na podjelu σ_2 svaka ćelija podjele σ_1 ostaje nepromjenjena ili se dijeli novom pravilnom podjelom. Takođe kažemo u tom slučaju da je podjela σ_2 finija od podjele σ_1.*



(a) Pravilna podjela (b) δ-ćelija pravilne podjele

(c) Podjela σ_1 (d) Finija podjela σ_2

Slika 5.1: Prelaz iz jedne podjele u finiju podjelu.

Definicija 5.1.4. *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ proizvoljna oblast i σ neka njena pravilna podjela. Neka je funkcija $f(\boldsymbol{x})$ ograničena na D. Integralnom sumom funkcije f u oblasti D nazivamo svaku sumu oblika*

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_i) mes(\sigma_i) \ ,$$

gdje su σ_i $(i = 1, ..., n)$ ćelije podjele σ, $\boldsymbol{x}_i \in \sigma_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ proizvoljne tačke.

Uporedo sa generalnim integralnim sumama funkcije f posmatrat ćemo i specijalne, gornje i donje integralne sume:

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot mes(\sigma_i) \ \text{ i } \ \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot mes(\sigma_i) \ ,$$

gdje su $m_i = \inf_{\boldsymbol{x}\in\sigma_i} f(\boldsymbol{x})$, $M_i = \sup_{\boldsymbol{x}\in\sigma_i} f(\boldsymbol{x})$, $(i = 1, 2, ..., n)$. Ove sume nazivamo takođe i gornja, odnosno donja Darbouxova suma.

Za integralne sume vrijede sljedeća tvrđenja koja se jednostavno pokazuju.

Teorem 5.1.1. *Donja integralna suma je manja ili jednaka od gornje integralne sume za proizvoljnu podjelu oblast.*

Dakle, neka je $\underline{S}_1$ donja integralna suma pri podjeli σ_1 i neka je $\overline{S}_2$ gornja integralna suma pri proizvoljnoj drugoj podjeli σ_2. Tada vrijedi $\underline{S}_1 \leq \overline{S}_2$.

Teorem 5.1.2. *Pri produženju podjele oblasti gornja integralna suma ne raste, a donja integralna suma ne opada.*

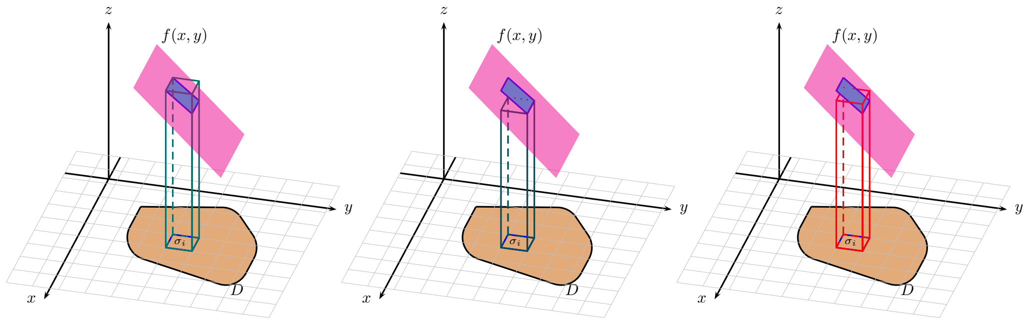
Neka su σ_1 i σ_2 dvije podjele iste oblasti, pri čemu je σ_2 produženje podjele σ_1 (σ_2 je finija podjela).

Neka su $\underline{S}_1$, $\underline{S}_2$, $\overline{S}_1$ i $\overline{S}_2$ donje i gornje integralne sume redom pri podjelama σ_1 i σ_2. Gornjim teoremom tvrdimo dakle da vrijedi: $\overline{S}_2 \leq \overline{S}_1$ i $\underline{S}_1 \leq \underline{S}_2$.

Teorem 5.1.3. *Za integralne sume vrijedi*

$$m\ mes(D) \leq \underline{S} \leq S \leq \overline{S} \leq M mes(D)\ ,$$

gdje je $m = \inf_{\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x})$, $M = \sup_{\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x})$.

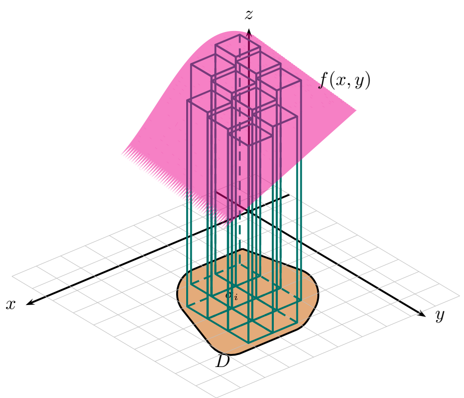


(a) Gornja Darbouxova suma (b) Donja Darbouxova suma (c) Proizvoljna integralna suma

PRIMJER 1 : Za funkciju dvije promjenljive integralna suma je oblika

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) mes(\sigma_i)\ ,$$

gdje je $\boldsymbol{x}_i(\xi_i, \eta_i) \in \sigma_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.



Slika 5.2: Formiranje integralne sume funkcije $f(x, y)$ nad oblašću D.

5.2 Definicija višestrukog integrala

Neka je $S = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_i) mes(\sigma_i)$, integralna suma funkcije $f(\boldsymbol{x})$ nad oblasti $D \subset \mathbb{R}^n$, pri podjeli σ.

Definicija 5.2.1. *Broj I nazivamo višestrukim integralom funkcije f ili n-integralom nad oblašću D ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takav da važi*

$$|S - I| < \varepsilon \ ,$$

za proizvoljnu pravilnu δ-podjelu oblasti D.

Vidimo da je broj I izražen kao granični proces, to jest kao granična vrijednost integralnih suma,

$$I = \lim_{\max diam(\sigma_i)\to 0} S \ .$$

Definicija 5.2.2. *Ako postoji jedinstvena i konačna granična vrijednost integralnih suma finkcije $f(\boldsymbol{x})$, kažemo da je funkcija integrabilna u datoj oblasti.*

Jasno je da će maksimalan dijametar ćelija podjele težiti ka 0 ako pravimo sve finiju i finiju podjelu oblasti (to jest ako broj ćelija podjele raste). Tako onda imamo

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\max diam(\sigma_i)\to 0} S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_i) mes(\sigma_i) \\ &= \int\int_D ... \int f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n \\ &= \int_D f(\boldsymbol{x}) d\sigma \ . \end{aligned}$$

Za funkciju dvije promjenljive $z = f(x, y)$, integrabilnu u oblasti D, imamo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) mes(\sigma_k) = \int_D f(\boldsymbol{x}) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy \ ,$$

pri čemu činjenica da $n \to \infty$ je ekvivalentna da $\max diam(\sigma_k) \to 0$. Ovaj integral nazivamo *dvojni integral* funkcije $f(x, y)$ nad zatvorenom oblasti D.

Za funkciju tri promjenljive $f(x, y, z)$ koja je integrabilna u oblasti D, po definiciji imamo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) mes(\sigma_k) = \int_D f(\boldsymbol{x}) d\sigma = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \ ,$$

i ovaj višestruki integral nazivamo *trojni integral* funkcije $f(x, y, z)$ nad zatvorenom oblasti D.

Da bi funkcija bila integrabilna nad nekom oblašću postoje razni kriterijumi. Navedimo jedan od najopštijih od njih.

Teorem 5.2.1. *Funkcija $f(\boldsymbol{x})$ neprekidna u oblasti D integrabilna je u datoj oblasti.*

5.3 Osobine integrabilnih funkcija

Sljedeće teoreme navodimo bez dokaza, iako se njihovo dokazivanje jednostavno izvodi koristeći definiciju višestrukog integrala, potpuno analogno odgovarajućim teoremama za funkciju jedne promjenljive.

Teorem 5.3.1. *(**Aditivnost po podintegralnoj funkciji**)*
Neka su f i f_i $(i = 1, 2, ..., n)$ integrabilne funkcije u oblasti D i neka je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Tada vrijedi:

1. $\int\limits_D (f_1(\boldsymbol{x}) \pm ... \pm f_n(\boldsymbol{x}))d\sigma = \int\limits_D f_1(\boldsymbol{x})d\sigma \pm ... \pm \int\limits_D f_n(\boldsymbol{x})d\sigma.$

2. $\int\limits_D cf(\boldsymbol{x})d\sigma = c\int\limits_D f(\boldsymbol{x})d\sigma.$

Teorem 5.3.2. *(**Aditivnost po granici integracije**)*
Za proizvoljnu podjelu oblasti integracije D na disjunktne parcijalne oblasti $\overline{D_1}, \overline{D_2}, ...\overline{D_n}$, važi

$$\int\limits_D f(\boldsymbol{x})d\sigma = \int\limits_{\overline{D_1}} f(\boldsymbol{x})d\sigma + \int\limits_{\overline{D_2}} f(\boldsymbol{x})d\sigma + ... + \int\limits_{\overline{D_n}} f(\boldsymbol{x})d\sigma \ ,$$

pri čemu je funkcija $f(\boldsymbol{x})$ integrabilna u svakom dijelu $\overline{D_i}$ $(i = 1, 2, ..., n)$, ukoliko je ona integrabilna u D i obrnuto.

Teorem 5.3.3. *Ako sa m i M označimo infimum i supremum integrabilne funkcije $f(\boldsymbol{x})$ u oblasti D, tada vrijedi procjena*

$$mes(D)m \leq \int\limits_D f(\boldsymbol{x})d\sigma \leq mes(D)M \ .$$

Teorem 5.3.4. *Ako u oblasti D vrijedi $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ $(f(\boldsymbol{x}) \leq 0)$, tada vrijedi*

$$\int\limits_D f(\boldsymbol{x})d\sigma \geq 0 \quad \left(\int\limits_D f(\boldsymbol{x})d\sigma) \leq 0\right) \ .$$

Za primjenu višestruke integracije posebno je važan sljedeći teorem.

Teorem 5.3.5. *Ako je $f(\boldsymbol{x}) = 1$ za svako $\boldsymbol{x} \in D$, tada je*

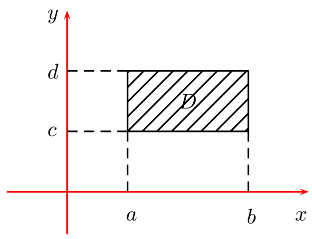
$$\int\limits_D f(\boldsymbol{x})d\sigma = \int\limits_D d\sigma = mes(D) \ .$$

U slučaju dvojnog integrala gdje je oblast integracije iz dvodimenzionalnog euklidskog prostora, ovo znači da će dvojni integral $\iint_D dxdy$ predstavljati površinu oblasti D, a u slučaju trojnog integrala izraz $\iiint_D dxdydz$ će predstavljati zapreminu oblasti D.

5.4 Dvojni integral

Dvojni integral definišemo za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, to jest za funkcije dvije varijable. Graf ovakvih funkcija je u prostoru $\mathbb{R}^3$, a njihov domen je u prostoru $\mathbb{R}^2$, tako da će naše razmatranje integrabilnosti ovakvih funkcija uvijek biti vezano za neku oblat $D \subset \mathbb{R}^2$.

5.4.1 Dvojni integral po pravougaonoj oblasti



Posmatrat ćemo prvo najidealniju varijantu integracije, po zatvorenoj pravougaonoj oblasti. Neka je funkcija $f(x, y)$ definisana u zatvorenom pravougaoniku

$$D: \quad a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d \ .$$

Definicija 5.4.1. *Neka je funkcija* $\Phi_1(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ *integrabilna za svako* $x \in [a, b]$. *Tada integral*

$$\int_a^b \Phi_1(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

nazivamo dvostrukim integralom funkcije $f(x, y)$ *u zatvorenoj pravougaonoj oblasti* D *pri sukcesivnoj integraciji prvo po promjenljivoj* y, *a zatim po promjenljivoj* x.

Takođe, možemo posmatrati funkciju $\Phi_2(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ za koju zahtjevamo da je integrabilna za svako $y \in [c, d]$, onda integral

$$\int_c^d \Phi_2(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$$

nazivamo dvostruki integral funkcije $f(x, y)$ u oblasti D pri sukcesivnoj integraciji prvo po x, a zatim po y.

Teorem 5.4.1. *Neka je funkcija* $f(x, y)$ *integrabilna u zatvorenoj pravougaonoj oblasti* D *(to jest neka postoji dvojni integral funkcije* f*) i neka za proizvoljno* $x \in [a, b]$ *postoji integral* $\int_c^d f(x, y)dy$. *Tada postoji dvostruki integral* $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$ *i pri tome vrijedi*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy \ .$$

Na sličan način pod odgovarajućim uslovima, važi

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \ .$$

Teorem 5.4.1 nam u stvari daje tehniku za izračunavanje dvojnog integrala nad pravougaonom oblasti. Ona se kako vidimo, svodi na prelazak iz dvojnog u dvostruki integral čije su granice u slučaju pravougaone oblasti, konstantne.

Kao posljedicu Teorema 5.4.1 i napomene iza nje, imamo

Posljedica 1. *Ako je funkcija* $f(x, y)$ *integrabilna u zatvorenom pravougaoniku* D *i ako postoje dvostruki integrali*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy \ \ i \ \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \ ,$$

tada vrijedi

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \ .$$

Ovo nam u stvari govori da redoslijed integracije ne utiče na vrijednost dvojnog integrala.

PRIMJER 2 : Izračunati integral $I = \iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, gdje je D kvadrat

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \ .$$

Rješenje: Dvojni integral I svodimo na dvostruki, to jest

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx(\sin(x+y)\mid_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin x\right] dx = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\mid_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \mid_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \ . \end{aligned}$$

PRIMJER 3 : Izračunati: $I = \iint\limits_D 6xy^2dxdy$, gdje je D pravougaonik $[2,4] \times [1,2]$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \iint\limits_D 6xy^2dxdy &= \int_2^4 \left(\int_1^2 6xy^2dy\right) dx = \int_2^4 \left(6x \int_1^2 y^2dy\right) dx \\ &= \int_2^4 \left(6x\frac{y^3}{3}\Big|_1^2\right) dx \\ &= \int_2^4 (16x - 2x)\, dx = 14\int_2^4 xdx \\ &= 14\ \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = 84 \end{aligned}$$

Primjetimo u gornjem primjeru da je podintegralna funkcija $f(x,y) = 6xy^2$ oblika $f(x,y) = g(x)h(y)$. Kod dvojnog integrala sa konstantnim granicama to možemo iskoristiti na sljedeći način

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D g(x)h(y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy \ .$$

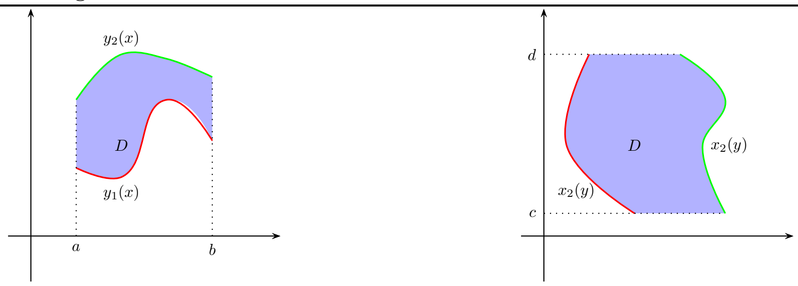
Tako bi u posljednjem primjeru imali

$$\iint\limits_D 6xy^2 = 6\int_2^4 xdx \cdot \int_1^2 y^2dy = 6\ \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_1^2 = 84,$$

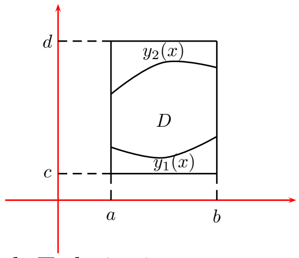
što očigledno predstavlja jednostavniji način izračunavanja ovog dvojnog integrala.

5.4.2 Dvojni integral po proizvoljnoj oblasti

U integraciji po proizvoljnoj oblasti mogu nastupiti dva slučaja prikazana na slici 5.3. Na slici lijevo imamo situaciju kada se x nalazi između konstantnih granica a i b, a y je između krivih $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Na desnoj slici imamo drugi slučaj, to jest $c \le y \le d$ i $x_1(y) \le x \le x_2(y)$.



Slika 5.3: Proizvoljna oblast integracije.



Razmotrimo situaciju prestavljenu lijevom slikom, a na potpuno analogan način se razmatra i druga mogućnost. Neka su funkcije y_1 i y_2 takve da za svako $x \in [a,b]$ vrijedi $y_1(x) \leq y_2(x)$. Posmatrajmo oblast zadatu sa

$$D: \ a \leq x \leq b \quad , \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \ .$$

Neka su c i d fiksirani realni brojevi takvi da je $c \leq y_1(x) \leq y_2(x) \leq d$. Tada je sistemom

$$D^*: \quad a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d \ ,$$

zadana pravougaona oblast, za koju uočavamo da je sastavljena od tri odvojene oblasti:

$$\begin{array}{ll} D_1: & a \leq x \leq b \ , \ c \leq y \leq y_1(x) \\ D: & a \leq x \leq b \ , \ y_1(x) \leq y \leq y_(x) \\ D_2: & a \leq x \leq b \ , \ y_2(x) \leq y \leq d \ . \end{array}$$

Pomoću funkcije $f(x,y)$ definisane u oblast D, konstruišimo novu funkciju.

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ; \quad (x,y) \in D \\ 0 & ; \quad (x,y) \in D_1 \cup D_2 \end{cases}$$

Funkcija f^* je integrabilna u oblasti pravougaonika jer je konstantna na $D_1 \cup D_2$, a poklapa se sa integrabilnom funkcijom f na D.
Prema prethodnoj sekciji sada imamo

$$\iint_{D^*} f^*(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x,y)dy \ . \tag{5.1}$$

Posmatrajmo sada lijevu stranu u jednakosti (5.1). Na osnovu aditivnosti višestrukog integrala po oblasti integracije, imamo

$$\iint_{D^*} f^*(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f^*(x,y)dxdy + \iint_{D} f^*(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f^*(x,y)dxdy \ . \tag{5.2}$$

Na osnovu definicije funkcije f^* je

$$\iint_{D_1} f^*(x,y)dxdy = \iint_{D_2} f^*(x,y)dxdy = 0$$

i

$$\iint_{D} f^*(x,y)dxdy = \iint_{D} f(x,y)dxdy \ .$$

Sada iz (5.2) imamo

$$\iint\limits_{D^*} f^*(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \ . \tag{5.3}$$

Posmatrajmo sada unutrašnji integral na desnoj strani u (5.1). Zbog aditivnosti određenog integrala važi

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_c^{y_1(x)} f^*(x,y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy + \int_{y_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy \tag{5.4}$$

Opet na osnovu definicije funkcije f^* vrijedi

$$\int_c^{y_1(x)} f^*(x,y)dy = \int_{y_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy = 0 \ ,$$

pa jednakost (5.4) postaje

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \ . \tag{5.5}$$

Koristeći (5.3) i (5.5), jednakost (5.1) postaje

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \ . \tag{5.6}$$

Ako je oblast integracije data sistemom (desna slika)

$$D: \quad x_1(y) \le x \le x_2(y) \quad , \quad c \le y \le d \ ,$$

slično gornjem rezonovanju bi dobili

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \ . \tag{5.7}$$

Formule (5.6) i (5.7) nam daju način izračunavanja dvojnog integrala za proizvoljnu oblast integracije. Dakle, dvojni integral rješavamo pomoću dvostrukog integrala u kome su granice unutrašnje integracije eventualno ovisne o jednoj promjenljivoj dok su granice spoljašnje integracije obavezno konstantne (po promjenljivima integracije).

Što se tiče pravila za izračunavanje dvojnih integrala, ona su:

1. Aditivnost po podintegralnoj funkciji:

$$\iint\limits_{D} (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{D} g(x,y)dxdy \ .$$

2. Izvlačenje konstante:

$$\iint\limits_{D} cf(x,y)dxdy = c\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \ .$$

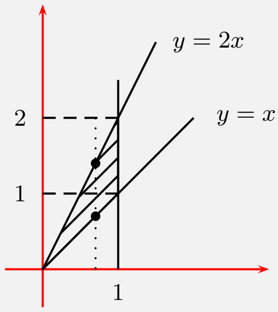
3. Aditivnost po granici integracije:

$$\iint\limits_{D=D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy \ .$$

PRIMJER 4 : Izvršiti prelaz iz dvojnog u dvostruki integral funkcije $f(x,y)$ nad oblašću D, ako je

$$D: \quad y = x \ , \ y = 2x \ , \ x = 1 \ .$$

Oblast integracije je šrafirani dio na slici.

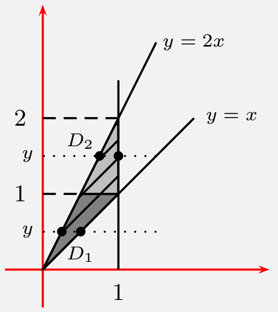


Odlučimo se za redoslijed integracije prvo (unutrašnja) po y, a zatim (spoljašnja) po x. To nam onda diktira da granice za x moraju biti konstante, dok za y one mogu ovisiti o varijabli x. Projektujući oblast D na x-osu, dobijamo da su granice za x od 0 do 1. Birajući proizvoljan $x \in [0, 1]$ i posmatrajući vertikalu u toj tački, konstatujemo da se najmanja vrijednost y postiže na liniji $y = x$, a najveća na liniji $y = 2x$.

To nam upravo predstavlja granice integracije.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy = \int_0^1 \left(\int_x^{2x} f(x,y)dy \right) dx \ .$$

Ako bi zamjenili redoslijed integracije treba primjetiti da datu oblast moramo podijeliti na dvije disjunktne oblasti.

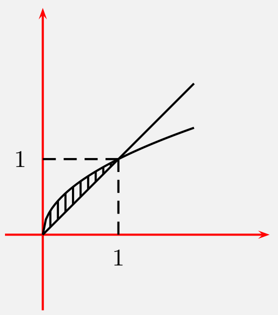


Naime, ako se odlučimo za redoslijed integracije prvo (unutrašnja) po x, a zatim (spoljašnja) po y, to nam onda diktira da granice za y moraju biti konstante, dok za x one mogu ovisiti o varijabli y. Međutim, birajući da je $0 \le y \le 1$, vidimo da se tada vrijednost x-a mijenja od prave $x = \frac{y}{2}$ do prave $x = y$, a ako biramo $1 \le y \le 2$, onda se x mijenja od prave $x = \frac{y}{2}$ do prave $x = 1$.

Zbog toga oblast integracije D razbijamo na dvije oblasti, $D_1 : \ 0 \le y \le 1 \ , \ \frac{y}{2} \le x \le y$ (tamnosiva) i $D_2 : \ 1 \le y \le 2 \ , \ \frac{y}{2} \le x \le 1$ (svijetlosiva). Koristeći aditivnost dvojnog integrala po granici integracije sada imamo,

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{1} f(x,y)dx \ .\end{aligned}$$

PRIMJER 5 : Izvršiti prelaz iz dvojnog u dvostruki integral funkcije $f(x, y)$ nad oblašću $D : \quad y = x \ , \ y = \sqrt{x}$.



Oblast integracije je šrafirani dio na slici. Sada imamo

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx \ .\end{aligned}$$

Primjetimo da u ovom slučaju imamo jednostavnu zamjenu redoslijeda integracije, to jest

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} f(x,y)dx \ ,$$

što u prvom primjeru nije bio slučaj.

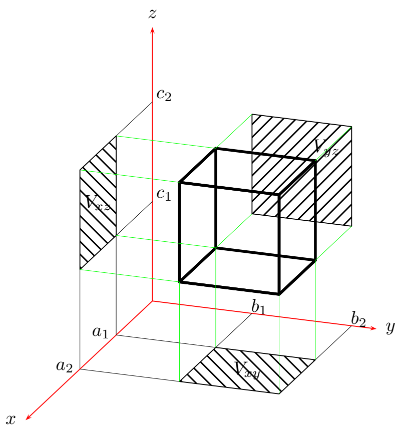
5.5 Trojni integral

5.5.1 Trojni integral po oblasti pravouglog paralelepipeda

Neka je sada funkcija $f(x,y,z)$ definisana i integrabilna u zatvorenoj oblasti

$$V: \quad a_1 \leq x \leq a_2 \ , \ b_1 \leq y \leq b_2 \ , \ c_1 \leq z \leq c_2 \ .$$

Na slici su sa V_{xy}, V_{xz} i V_{yz} označene redom projekcije paralelepipeda $\overline{V}$ na xOy, xOz i yOz ravan.



Slika 5.4: Trojni integral po pravougloj oblasti

Definicija 5.5.1. *Neka je funkcija* $\Phi_1(x) = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$ *integrabilna na segmentu* $[a_1,a_2]$. *Tada integral*

$$\int_{a_1}^{a_2} \Phi_1(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz \ ,$$

nazivamo trostrukim integralom funkcije $f(x,y,z)$ *u zatvorenom paralelepipedu pri čemu se integracija vrši prvo po promjenljivoj* z *zatim po promjenljivoj* y *i na kraju po promjenljivoj* x.

Definicija 5.5.2. *Neka je funkcija* $\Phi_2(z) = \iint\limits_{V_{xy}} f(x,y,z)dxdy$ *integrabilna na segmentu* $[c_1,c_2]$.

Integral

$$\int_{c_1}^{c_2} \Phi_2(z)dz = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{V_{xy}} f(x,y,z)dxdy \ ,$$

nazivamo trostrukim integralom funkcije $f(x,y,z)$ *po oblasti zatvorenog paralelepipeda, pri sukcesivnoj integraciji prvo unutrašnja integracija po projekciji paralelepipeda u* xOy *ravan (dvojni integral), a zatim spoljna integracija po promjenljivoj* z.

Definicija 5.5.3. *Neka je funkcija* $\Phi_3(x,y) = \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$ *integrabilna u oblasti* V_{xy}.

Integral

$$\iint\limits_{V_{xy}} \Phi_3(x,y)dxdy = \iint\limits_{V_{xy}} dxdy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz \ ,$$

nazivamo trostruki integral funkcije $f(x,y,z)$ po oblasti paralelepipeda, pri sukcesivnoj integraciji prvo po promjenljivoj z (unutrašnja integracija), a zatim po oblasti V_{xy} (spoljašnja integracija).

Ne izazivajući zabunu, očigledno da sve tri gornje definicije definišu isti pojam trostrukog integrala. Razlika je u tome što se na desnim stranama jednakosti pojavljuju različiti redoslijedi integracije. Potpuno ravnopravno smo mogli posmatrati i bilo koju drugu varijantu redoslijeda integracija na desnim stranama jednakosti tih definicija, naprimjer prvo po x, zatim po y i na kraju po z. To nam je omogućeno time što je oblast integracije oblast pravouglog paralelepipeda koja je "idealna" u smislu jednostavnosti integracije. Ovo potvrđujemo narednim tvrđenjem, a koji nam ujedno daje i tehniku rješavanja trojnog integrala po oblasti pravouglog paralelepipeda.

Teorem 5.5.1. *Neka je funkcija $f(x,y,z)$ integrabilna u zatvorenom paralelepipedu V i neka za proizvoljno $(x,y) \in V_{xy}$ postoji integral $\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$, tada postoji i integral*

$$\iint\limits_{V_{xy}} dxdy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$$

i vrijedi jednakost

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz &= \iint\limits_{V_{xy}} dxdy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz \\ &= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz \ .\end{aligned}$$

PRIMJER 6 : Izračunati $\iiint\limits_{V} xyzdxdydz$, gdje je oblast V zadata sa:

$$0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 \ , \ 0 \le z \le 1 \ .$$

Rješenje: Dakle, u pitanju je integracija po paralelepipedu, zato vrijedi

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{V} xyzdxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 xyzdz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(xy\frac{z^2}{2}\right)_0^1 \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{2}dy = \int_0^1 dx \left(\frac{x}{2}\frac{y^2}{2}\right)_0^1 \\ &= \int_0^1 \frac{x}{4}dx = \frac{1}{8} \ .\end{aligned}$$

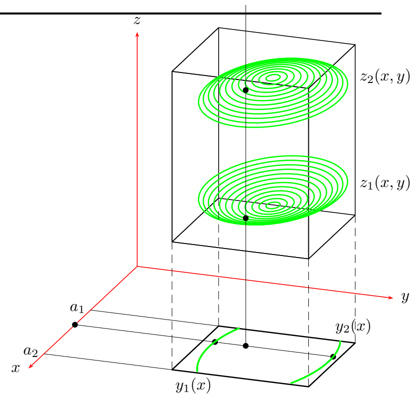
Primjetimo i ovdje da ako je podintegralna funkcija funkcija razdvojenih promjenljivih, to jest $f(x,y,z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, da se izračunavanje trojnog integrala po pravougaonoj oblasti V svodi na

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} f_1(x)dx \cdot \int_{b_1}^{b_2} f_2(y)dy \cdot \int_{c_1}^{c_2} f_3(z)dz \ .$$

5.5.2 Trojni integral po proizvoljnoj oblasti

Neka je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru zadata oblast

$$V : \quad a_1 \le x \le a_2 \ , \ y_1(x) \le y \le y_2(x) \ , \ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \ .$$



Slika 5.5: Trojni integral po proizvoljnoj oblasti

Neka je funkcija $f(x,y,z)$ integrabilna u oblasti V. Slično rezonovanju kod dvojnog integrala i ovdje bi smo oko oblasti V opisali paralelepiped, pa bi smo dijeleći taj paralelepiped na disjunktne oblasti došli do jednakosti

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \; ,$$

koja nam daje jedan od načina rješavanja trojnog integrala.

Pravila u radu sa trojnim integralima su:

1. Aditivnost po podintegralnoj funkciji:

$$\iiint\limits_V (f(x,y,z) \pm g(x,y,z))dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdyz \pm \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdyz \; .$$

2. Izvlačenje konstante:

$$\iiint\limits_V cf(x,y,z)dxdyz = c \iint\limits_V f(x,y,z)dxdyz \; .$$

3. Aditivnost po granici integracije:

$$\iiint\limits_{V=V_1\cup V_2} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz \; .$$

PRIMJER 7 : Izračunati $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, gdje je oblast V zadata sa

$$x \geq 0 \; , \; y \geq 0 \; , \; z \geq 0 \; , \; x^2+y^2+z^2 \leq 1 \; .$$

Rješenje: Sada imamo integraciju po dijelu lopte centra $(0,0,0)$, poluprečnika 1, koji se nalazi u prvom oktantu. Neka prva integracija bude po z, druga po y i treća po x. To znači da su granice za x konstantne, pa zato projektujmo tijelo V u xOy ravan (slika 5.6, desno) iz koje vidimo granice

$$0 \leq x \leq 1 \; , \; 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \; .$$

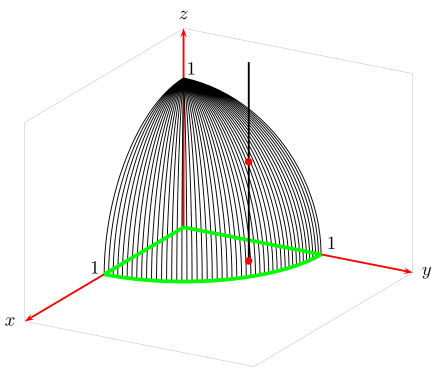
Granice za z određujemo na sličan način kao za y: u oblasti projekcije izaberemo proizvoljnu tačku i iz nje vučemo vertikalu. Na toj vertikali određujemo najmanju i najveću vrijednost za z, odnosno na kojim površima se nalaze te vrijednosti. Na slici 5.6 lijevo, vidimo da je najmanja vrijednost za z u ravni $z=0$, a najveća se uvijek nalazi na površi $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

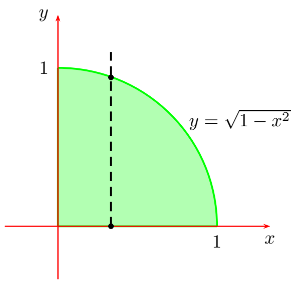
Ovo nam sada daje prelaz iz trojnog u trostruki integral

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz = \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz \; .$$

Ostaje još "računski" dio zadatka.

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz = \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \cdot \left(\frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}\ .$$





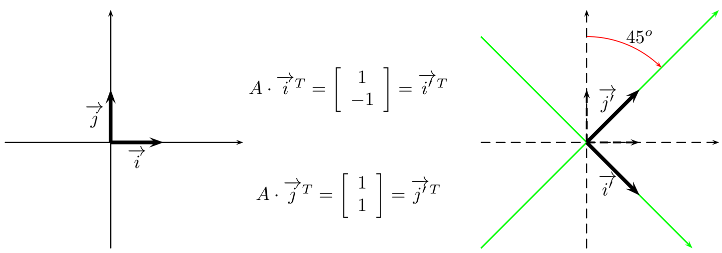
Slika 5.6: Dio centralne lopte poluprečnika 1, u prvom oktantu (lijevo) i njegova projekcija u xOy ravan (desno)

5.6 Jacobijeva determinanta

U linearnoj algebri smo vidjeli da matrice nisu ništa drugo do preslikavanja vektorskog prostora. Pri tome smo se upoznali sa matricama prelaza i vidjeli da je dovoljno znati u šta se preslikavaju vektori baze. Tako na primjer matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\ ,$$

predstavlja rotaciju ravni, odnosno $\mathbb{R}^2$ prostora (slika 5.7).



Slika 5.7: Rotacija realne ravni.

Sada proizvoljnu tačku (x, y) sistema $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ preslikavamo u tačku (x', y') sitema $\{\vec{i'}, \vec{j'}\}$, sistemom jednačina

$$x' = x + y$$
$$y' = -x + y\ ,$$

koji je određen matricom A (matrica sistema).

Ako sada posmatramo proizvoljan algebarski sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
&y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n\\
&y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n\\
&...\\
&y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \ ,
\end{aligned}$$

možemo ga zapisati u matričnom obliku

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$$

pa on dakle predstavlja neko preslikavanje $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ukoliko postoji inverzno preslikavanje datog preslikavanja, takvo preslikavanje nazivamo *regularnim.* U gornjem slučaju to će biti ako postoji A^{-1}, to jest ako je matrica A regularna matrica.

Posmatrajmo na kraju najopštiji slučaj preslikavanja iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
&y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n)\\
&y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n)\\
&.....................................\\
&y_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \ .
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Na osnovu ovog sistema možemo formirati funkcionalnu determinantu

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ ...... & ... & ...... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Definicija 5.6.1. *Za preslikavanje (5.8) kažemo da je regularno u oblasti D ako vrijedi*

1. *funkcije $f_1, ..., f_n$ imaju neprekidne parcijalne izvode po svakoj promjenljivoj,*
2. *$J \neq 0$.*

Determinantu J nazivamo *Jacobijeva determinanta* ili *jakobijan* preslikavanja (5.8).

U literaturi se često za jakobijan preslikavanja (5.8) koristi oznaka

$$J = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} \ .$$

Ako je dato preslikavanje (5.8) i preslikavanje

$$\begin{aligned}
&x_1 = g_1(t_1, t_2, ..., t_n)\\
&x_2 = g_2(t_1, t_2, ..., t_n)\\
&.....................................\\
&x_n = g_n(t_1, t_2, ..., t_n) \ ,
\end{aligned}$$

nije teško pokazati da za jakobijane ovih preslikavanja važi

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} \frac{D(g_1, g_2, ..., g_n)}{D(t_1, t_2, ..., t_n)} = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(t_1, t_2, ..., t_n)} \ .$$

Iz ovoga onda proizilazi važna osobina jakobijana:

$$\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} \frac{D(x_1, x_2, ..., x_n)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)} = 1 \ , \tag{5.9}$$

naravno pod pretpostavkom postojanja inverznih preslikavanja y_i^{-1} $(i = 1, 2, ..., n)$.

Primjer 8 : Zadato je preslikavanje $\rho\varphi$ ravni u xy ravan sa

$$\begin{aligned} x &= x(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi \\ y &= y(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi \ . \end{aligned}$$

Odrediti jakobijan zadatog preslikavanja.

$$J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \ .$$

Računanjem iz zadatog sistema dobijamo

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 = x^2 + y^2 \ ,$$

odakle je $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Koristeći se jednakošću (5.9) lagano dobijamo da je

$$\frac{D(\rho,\varphi)}{D(x,y)} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ .$$

5.7 Smjena promjenljivih u dvojnom integralu

Izračunavanje integrala, kao što smo to vidjeli kod običnog jednostrukog Riemanovog integrala, često je olakšano uvođenjem povoljne smjene. Ista je situacija i kod n-integrala, to jest pogodnom smjenom uprošćava se računanje n-integrala. Neka je zadat sistem

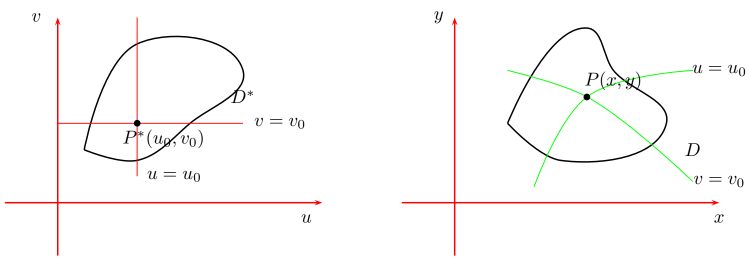
$$x = x(u,v) \ , \ y = y(u,v) \tag{5.10}$$

Dati sistem predstavlja transformaciju uv-ravni u xy-ravan, to jest svakoj tački $P^*(u,v)$ iz uv-ravni odgovara tačka $P(x,y)$ iz xy-ravni. Ako tački $P^* \in D^*$ odgovara jedinstvena tačka $P \in D$ i obratno, tada je gornjom transformacijom uspostavljeno bijektivno preslikavanje oblasti D^* na D. Gornjom transformacijom se prava $u = u_0$ oblasti D^*, koja se nalazi u uv-ravni, preslikava na krivu u-liniju u xy-ravni

$$x = x(u_0,v) \ , \ y = y(u_0,v) \ .$$

Analogno, prava $v = v_0$ oblasti D^* iz uv-ravni se preslikava u krivu v-liniju u xy-ravni

$$x = x(u,v_0) \ , \ y = y(u,v_0) \ .$$



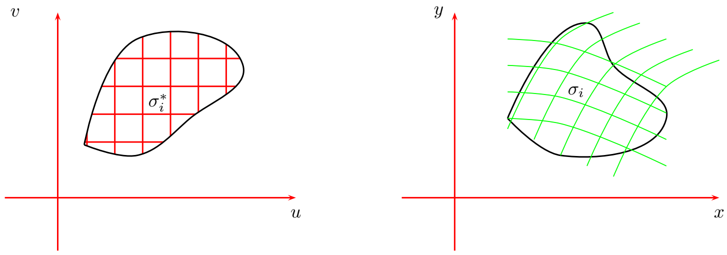
Slika 5.8: Transformacija nekih linija prilikom smjene.

Ukoliko je oblast D^* podjeljena mrežom pravih $u = u_0$, $v = v_0$, na pravolinijske ćelije-pravougaonike σ_i^*, transformacijom (5.10) se ta podjela preslikava u krivolinijske ćelije σ_i u xy-ravni.

Pri tome se pokazuje da vrijedi

$$\lim_{diam\sigma_i \to 0} \frac{mes(\sigma_i)}{mes(\sigma_i^*)} = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = |J(x_i,y_i)| \ ,$$

u nekoj tački $(x_i,y_i) \in \sigma_i$. Ovo nam daje princip promjene oblasti integracije prilikom uvođenja smjena.



Slika 5.9: Transformacija oblasti sa podjelom.

Teorem 5.7.1. *Ako se sistemom funkcija*

$$x = x(u,v) \ , \ y = y(u,v)$$

realizuje bijektivno preslikavanje oblasti D^* u oblast D i ako je funkcija $f(x,y)$ integrabilna u oblasti D, tada je

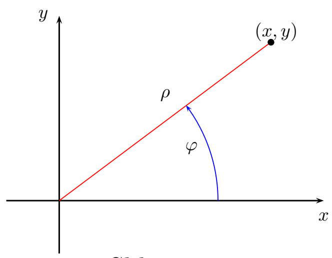
$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv \ .$$

Kao specijalnu smjenu kod dvojnih integrala navodimo ovdje polarne koordinate, to jest transformaciju

$$x = \rho\cos\varphi \quad , \quad y = \rho\sin\varphi \ , \tag{5.11}$$

pri čemu su prirodne granice novih varijabli date sa

$$0 \le \rho < +\infty \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$

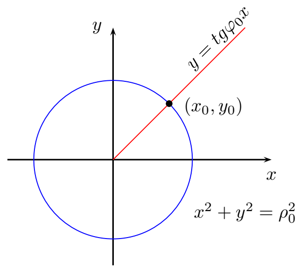


Slika 5.10: Polarne koordinate.

Geometrijski, ρ predstavlja udaljenost tačke od koordinatnog početka, a φ je ugao između pozitivnog dijela x-ose i duži ρ, te odatle proizilaze prirodne granice za ove veličine.

Naravno, sada se postavlja pitanje da li postoje različite tačke u xy-ravni kojima bi odgovarale iste veličine ρ i φ?

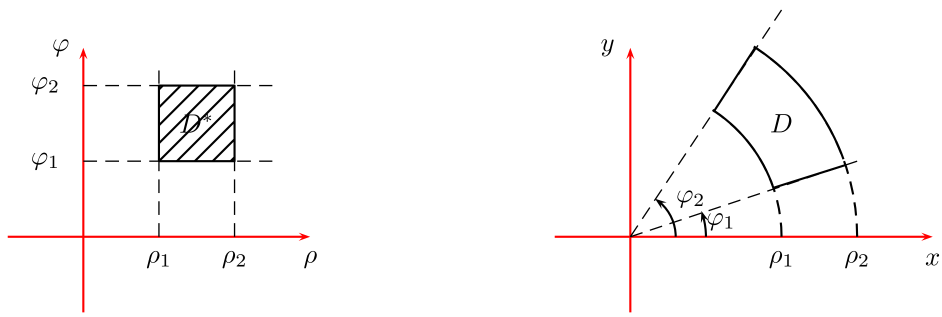
Ako posmatramo neko fiksno ρ_0, koristeći smjene 5.11, zaključujemo da sve tačke na kružnici $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ imaju istu udaljenost od koordinatnog početka. Analogno, ako fiksiramo neki ugao φ_0, ponovo koristeći smjene (5.11) dobijamo da sve tačke na polupravoj $y = tg\varphi_0 x$ imaju isti ugao prema pozitivnom dijelu x-ose.



Slika 5.11: Koordinatne linije polarnih koordinata.

Iz ovoga zaključujemo da polarne koordinate (ρ_0, φ_0) određuju tačno jednu tačku u xy-ravni, što je i odgovor na postavljeno pitanje. Osim toga, iz gornjeg razmatranja se vidi da se linije $\varphi = \varphi_0$ iz polarnog sistema preslikavaju u poluprave u xy-sistemu, a da se linije $\rho = \rho_0$ preslikavaju u kružnice.

Dakle, slika preslikavanjem (5.11) oblasti D^* iz polarnog sistema, je oblast D u pravouglom koordinatnom sistemu. Kako je jakobijan ovog preslikavanja dat sa $J = \rho$, to na osnovu Teoreme



Slika 5.12: Preslikavanje koordinatnih linija polarnim koordinatama.

5.7.1 imamo

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi))\rho d\rho d\varphi \ .$$

PRIMJER 9 : Izračunati: $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, gdje je oblast integracije $D:\ x^2+y^2=1$.

Uvedimo polarne koordinate: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Ubacujući ove smjene u jednačinu kružnice, koja predstavlja oblast integracije, dobijamo da je $\rho=1$. Kako nemamo nikakav uslov na ugao φ, to je nova oblast integracije data sa

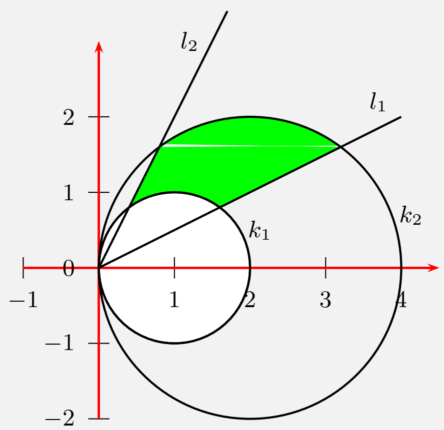
$$D^* \ : \ 0\le\rho\le 1 \ \ , \ \ 0\le\varphi\le 2\pi \ .$$

Sada imamo

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint\limits_{D^*} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 \rho e^{-\rho^2}d\rho = \pi(1-e^{-1}) \ .$$

PRIMJER 10 : Izračunati: $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy$, gdje je oblast zadata sa

$$D : (k_1)\ x^2+y^2=2x \ , \ (k_2)\ x^2+y^2=4x \ , \ (l_1)\ y=\frac{x}{2} \ , \ (l_2)\ y=2x \ .$$



Uvedimo polarne koordinate

$$x=\rho\cos\varphi \ , \ y=\rho\sin\varphi \ , \ J=\rho \ .$$

Ubacujući smjene u jednačine kružnice k_1 i k_2, dobijamo redom

$$\rho=2\cos\varphi \ , \ \rho=4\cos\varphi \ . \tag{5.12}$$

Jednačine linija l_1 i l_2 daju nam veze

$$tg\varphi=\frac{1}{2} \ , \ tg\varphi=2 \ . \tag{5.13}$$

Veze (5.12) i (5.13) nam daju upravo donju i gornju granicu novih varijabli, to jest novodobijena oblast je

$$D^* : \ \rho\ge 2\cos\varphi \ , \ \rho\le 4\cos\varphi \ , arctg\frac{1}{2}\le\varphi\le arctg2 \ .$$

Sada je prelaz u dvostruki integral dat sa

$$\iint\limits_{D} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \iint\limits_{D^*} \frac{1}{\rho^4}\rho d\rho d\varphi = \int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4cos\varphi} \frac{1}{\rho^3} d\rho$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2} \left(\frac{1}{16\cos^2\varphi} - \frac{1}{4\cos^2\varphi}\right) d\varphi$$

$$= \frac{3}{32}\int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2} \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi = \frac{3}{32} tg\varphi \Big|_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2} = \frac{9}{64} .$$

Opštija smjena od gornje smjene su tzv. *uopštene polarne koordinate*, to jest

$$x = a\rho\cos\varphi \quad , \quad y = b\rho\sin\varphi \ ,$$

gdje su a i b pozitivni realni brojevi. Ovom smjenom se elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ u xy-ravni, prevodi u jediničnu kružnicu $\rho = 1$ u $\rho\varphi$-ravni. Jakobijan ovog preslikavanja je $J = ab\rho$.

Napomenimo još i to da ako želimo jednačinu opšte elipse

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \ ,$$

prevesti u jediničnu kružnicu u $\rho\varphi$-ravni, to ćemo postići smjenama

$$x = a\rho\cos\varphi + p \ , \ y = b\rho\sin\varphi + q \ ,$$

sa jakobijanom $J = ab\rho$.

5.8 Smjena promjenljivih u trojnom integralu

Neka je dat sistem

$$x = x(u,v,w) \ , \ y = y(u,v,w) \ , \ z = z(u,v,w) \ , \tag{5.14}$$

kojim je definisano bijektivno preslikavanje tačaka $P^*(u,v,w)$ uvw-prostora, u tačke $P(x,y,z)$ iz xyz-prostora. Ako je J jakobijan preslikavanja (5.14) tada vrijedi

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J|dudvdw \ ,$$

gdje je V^* oblast u uvw-prostoru nastala preslikavanjem (5.14) oblasti V u xyz-prostoru.

Ovdje ćemo se upoznali sa cilindričnim i sfernim koordinatnim sistemom, a time i dvije vrste smjena u trojnom integralu.

Dakle, ako pravougli descartesov koordinatni sistem zamjenimo cilindričnim koordinatnim sistemom, što ostvarujemo sistemom

$$x = \rho\cos\varphi \ , \ y = \rho\sin\varphi \ , \ z = z \ ,$$

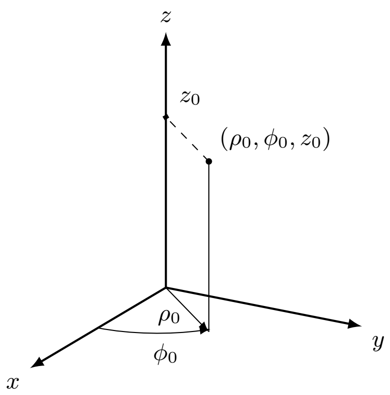
jakobijan kojeg je $J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \rho$, tada imamo

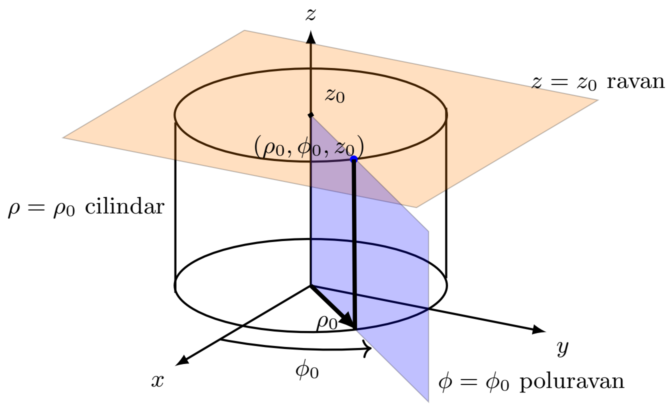
$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz \ .$$

Geometrijska interpretacija cilindričnih koordinata je ta da svakoj tački (x,y,z) iz xyz-prostora, pridružimo njen položaj na z-osi, udaljenost projekcije te tačke u xy-ravni od koordinatnog početka, ρ, i ugao između potega ρ i pozitivnog dijela x-ose, φ. Pri tome su prirodne granice novih varijabli

$$0 \le \rho < +\infty \ ; \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ ; \ -\infty < z < +\infty \ .$$

Držeći po jednu od cilindričnih koordinata konstantnom, dobijamo takozvane koordinatne površi u xyz-prostoru. Ako je $\rho = \rho_0$, dobijamo koordinatnu površ $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ (cilindar). Ako je $\varphi = \varphi_0$, odgovarajuća površ je data sa $y = tg\varphi_0 x$, a to je poluravan u prostoru koja sadrži z-osu. Na kraju, ako z držimo fiksnim, to jest $z = z_0$, odgovarajuća površ je ravan $z = z_0$.





Slika 5.13: Cilindrične koordinate. Koordinatne površi cilindričnih koordinata (desno).

PRIMJER 11 : Izračunati: $\iiint\limits_V \frac{zx}{x^2+y^2}dxdy$, gdje je oblast zadata sa

$$V : (k_1)\ x^2+y^2=x\ ,\ (k_2)\ x^2+y^2=2x\ ,\ 0\leq z\leq 4\ .$$

Uvođenjem cilindričnih koordinata

$$x=\rho\cos\varphi\ ,\ y=\rho\sin\varphi\ ,\ z=z\ ,$$

oblast V se transformiše u oblast

$$V^*\ :\ \cos\varphi\leq\rho\leq 2\cos\varphi\ ,\ -\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\leq z\leq 4\ .$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V \frac{zx}{x^2+y^2}dxdydz &= \iiint\limits_{V^*}\frac{z\rho\cos\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\rho d\varphi d\rho dz = \iiint\limits_{V^*} z\cos\varphi d\varphi d\rho dz\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}d\rho\int_0^4 zdz = 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}d\rho\\ &= 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi = 4\pi\ .\end{aligned}$$

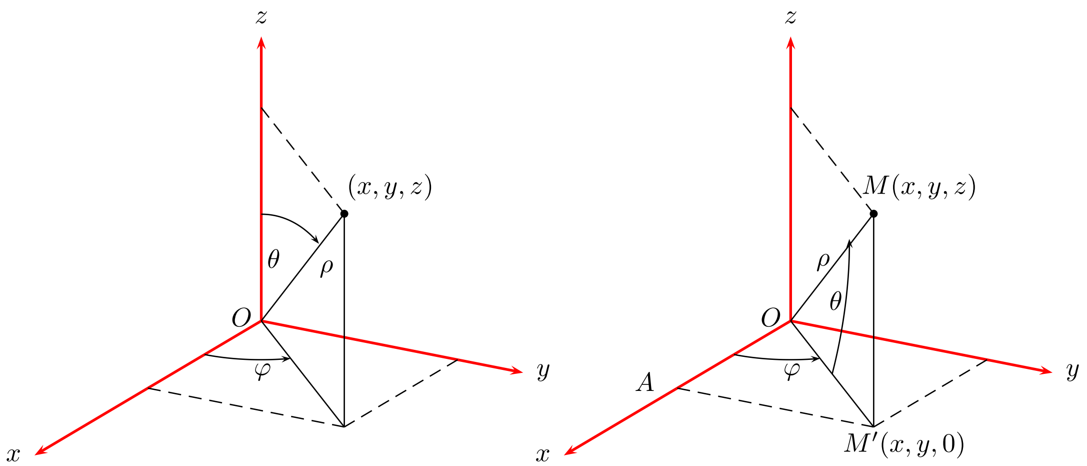
Sferni koordinatni sistem ima za ideju orijentaciju na sfernoj površini. Sferu dijelimo "paralelnim" kružnicama, među kojima je i ekvatorijalna, koje nazivamo paralelama, i "velikim" kružnicama koje sve prolaze kroz polove sfere, koje nazivamo meridijanima. U takvoj podjeli sfere, pokazuje se boljim opis položaja tačke u smislu koliko smo daleko (u stepenima) od nekog fiksnog meridijana i koliko smo daleko (u stepenima) od neke fiksne paralele, od uobičajenih koordinata, dužine, širine i visine. Naravno, ukoliko sferu "naduvavamo", treća bitna stvar o položaju je i udaljenost posmatrane tačke od koordinatnog početka. Postoje dva pristupa sfernim koordinatama, u zavisnosti od toga koju paralelu biramo za fiksnu.

Posmatrajmo gornju sliku desno. Uzimamo da je ρ udaljenost tačke M od koordinatnog početka, φ je udaljenost od meridijana, to jest ugao između potega OM', gdje je M' projekcija tačke M u Oxy ravni i pozitivnog dijela x-ose i θ je ugao između ρ i Oxy ravni, to jest udaljenost tačke M od ekvatorijalne ravni (izraženo uglom). Uočimo trougao $\triangle OM'M$. To je pravougli trougao, pa iz njega očitavamo

$$\cos\theta=\frac{OM'}{OM}\ ,\ \sin\theta=\frac{MM'}{OM}\ ,$$

odnosno

$$OM'=\rho\cos\theta\ ,\ MM'=z=\rho\sin\theta\ . \tag{5.15}$$



Slika 5.14: Dva pristupa sfernim koordinatama.

Iz pravouglog trougla $\triangle OAM'$ očitavamo

$$\cos\varphi = \frac{OA}{OM'}\ ,\ \sin\varphi = \frac{AM'}{OM'}\ ,$$

to jest

$$OM' = \frac{x}{\cos\varphi}\ ,\ OM' = \frac{y}{\sin\varphi}\ . \tag{5.16}$$

Kombinujući (5.15) i (5.16) dobijamo sferne koordinate za slučaj kada ugao θ mjerimo od ekvatorijalne ravni.

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta\ ,\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta\ ,\ z = \rho\sin\theta\ .$$

Prirodne granice su

$$0 \le \rho < +\infty\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ ,$$

jer su od "ekvatora" najudaljeniji polovi i to sjeverni $90°$, a južni $-90°$. Jakobijan za ovakve smjene je $J = \rho^2\cos\theta$, tako sada smjena u trojnom integralu izgleda

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho^2\cos\theta d\rho d\varphi d\theta\ .$$

PRIMJER 12 : Riješiti $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, gdje je V oblast između lopte $x^2+y^2+z^2 = R^2$ i dijela konusa $z^2 = x^2+y^2$, $z \ge 0$.

Uvedimo sferne koordinate

$$x = \rho\cos\varphi cos\theta\ ,\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta\ ,\ z = \rho\sin\theta\ ,$$

za koje je jakobijan $J = \rho^2\cos\theta$.
Stavljajući ove smjene u jednačinu konusa (vodeći računa da radimo sa unutrašnjim dijelom konusa, $z^2 \ge x^2+y^2$), dobijamo relaciju $\rho^2\sin^2\theta \ge \rho^2\cos^2\theta$, to jest uslov $\tan^2\theta \ge 1$. Ovaj uslov je ekvivalentan činjenici da je $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, a zbog uslova $z \ge 0$, to jest $\rho\sin\theta \ge 0$, takođe imamo da mora biti $\theta \in [0,\pi]$, što zajedno sa prirodnim granicama ovog ugla daje uslov

$$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ . \tag{5.17}$$

Stavljajući sferne koordinate u jednačinu sfere, dobijamo uslov $\rho^2 \le R^2$, a zbog prirodnih granica za ρ ovo daje uslov

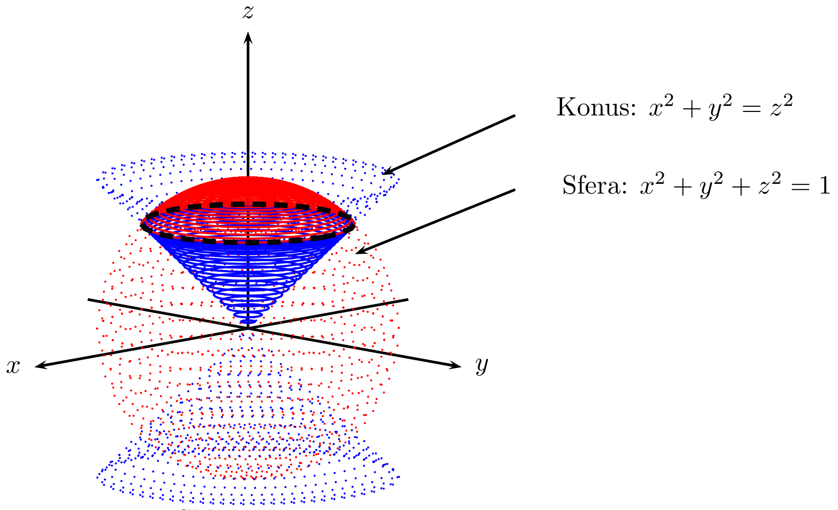
$$0 \le \rho \le R\ . \tag{5.18}$$

Kako drugih uslova više nemamo, granice ugla φ su prirodne, to jest

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \ . \tag{5.19}$$

Uslovi (5.17), (5.19) i (5.18) nam određuju oblast V^*, pa sada imamo

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz &= \iiint\limits_{V^*} \frac{1}{\rho^2}\rho^2 \cos\theta d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\ &= 2\pi R \sin\theta|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2R\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ .\end{aligned}$$



Slika 5.15: Presjek sfere i konusa.

Uvodeći sferni koordinatni sistem, mjereći ugao θ od sjevernog pola (Slika 5.14, lijevo), rezonujući slično kao u prvom slučaju, sistem glasi

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta \ , \ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \ , \ z = \rho\cos\theta \ ,$$

gdje su prirodne granice novih koordinata

$$0 \leq \rho < +\infty \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi \ .$$

Sada je najudaljenija tačka od sjevernog pola, južni pol i to 180°. Jakobijan je $J = \rho^2\sin\theta$, i smjena u trojnom integralu izgleda ovako

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta \ .$$

5.9 Primjena višestrukih integrala

Izračunavanje površine ravnih likova

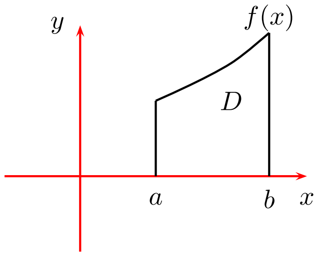
Posmatrajmo funkciju $y = f(x) \geq 0$ definisanu na razmaku $[a,b]$. Neka je D oblast ograničena sa gornje strane krivom $f(x)$ sa donje strane razmakom $[a,b]$ i sa strana pravama $x = a$ i $x = b$.

Iz ranijeg izučavanja znamo da je površina oblasti D data sa

$$mes(D) = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Međutim, gornji izraz se može zapisati i sa

$$mes(D) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \iint\limits_D dxdy \ ,$$



Slika 5.16: Površina oblasti D ispod krive $f(x)$, nad segmentom $[a, b]$.

što daje formulu za izračunavanje površine ravnog lika D.

PRIMJER 13 : Izračunati površinu kruga poluprečnika r.

Rješenje: U pitanju je proizvoljan krug , pa ćemo izabrati centralni krug poluprečnika r. Sada je tražena površina

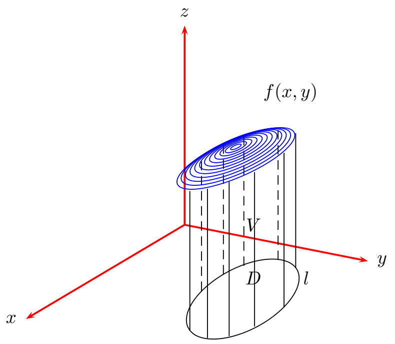
$$P = \iint_D dxdy \quad , \quad D : \ x^2 + y^2 = r^2 \ .$$

Uvedemo li polarne koordinate, to jest smjene $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, imamo

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho d\rho = r^2 \pi \ .$$

Izračunavanje zapremine

Neka je $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $z \geq 0$, površ u prostoru xyz. Sa l' označimo granicu oblasti D. Cilindrična površ sa vodiljom l' i izvodnicama paralelnim osi Oz, siječe površ $f(x, y)$ po krivoj l. Sa V označimo zapreminu tijela ograničenog sa pomenutom cilindarskom površi (sa strane), oblašću D (odozdo) i površi $f(x, y)$ (odozgo).



Slika 5.17: Zapremina V ispod površi $f(x, y)$, nad oblašću D.

Tada je

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy \ . \tag{5.20}$$

Zaista, iz same definicije trojnog integrala jesno je da vrijedi

$$V = \iiint_V dxdydz \ ,$$

a ovo na osnovu Definicije 5.5.3, možemo zapisati kao

$$V = \iint_D dxdy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_D f(x, y)dxdy \ .$$

U slučaju da je $f(x,y) \leq 0$, jasno je da vrijedi

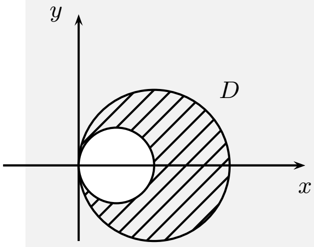
$$V = -\iint\limits_D f(x,y)dxdy .$$

PRIMJER 14 : Izračunati zapreminu tijela ograničenog paraboloidom $z = x^2 + y^2$, cilindarskim površima $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$ i sa ravni Oxy.

Ako sa D označimo oblast u Oxy ravni, omeđenu krugovima $x^2 + y^2 = x$ i $x^2 + y^2 = 2x$, tražena zapremina je

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy .$$

Uvedimo polarne koordinate: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Jednačine krugova u polarnim koordinatama su $\rho = \cos\varphi$ i $\rho = 2\cos\varphi$. Sada imamo



$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho \\ &= \frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi \\ &= \frac{45}{32}\pi . \end{aligned}$$

Izračunavanje mase tijela

Posmatrajmo tijelo mase m u dijelu V prostora $\mathbb{R}^3$ u pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$. Količnik $\frac{m}{mes(V)}$, naziva se srednja gustina datog tijela. Ako sada uočimo proizvoljnu tačku $A(x,y,z) \in V$ i proizvoljnu kuglu $K(A,\varepsilon)$ oko te tačke koja leži u tijelu V, gustinu tijela u tački A, u oznaci $\rho(A)$ po definiciji računamo sa

$$\rho(A) = \rho(x,y,z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_K}{mes(K(A,\varepsilon))} ,$$

gdje je m_K masa lopte $K(A,\varepsilon)$. Ako je $\rho(A) = const$, za tijelo kažemo da je homogeno i u tom slučaju veza između gustine ρ i zapremine $mes(V)$, data je poznatom nam formulom $m = mes(V)\rho$.

Pretpostavimo zato da tijelo nije homogeno i da mu je gustina $\rho(x,y,z)$, $(x,y,z) \in V$, poznata. Izvršimo podjelu tijela V na podoblasti V_i, $i = 1,2,...,n$, kojih je dijametar proizvoljno malen i u kojima onda možemo smatrati da je gustina konstantna i jednaka $\rho(x_i,y_i,z_i)$ za neku tačku $(x_i,y_i,z_i) \in V_i$. Jasno je tada da vrijedi

$$m_i = \rho(x_i,y_i,z_i)mes(V_i) \ , \ i = 1,2,...,n ,$$

pa ako izvršimo sumiranje svih ovih masa, dobijamo približnu masu tijela. Prelaskom na limes

$$\lim_{\max mes(V_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i,z_i)mes(V_i) ,$$

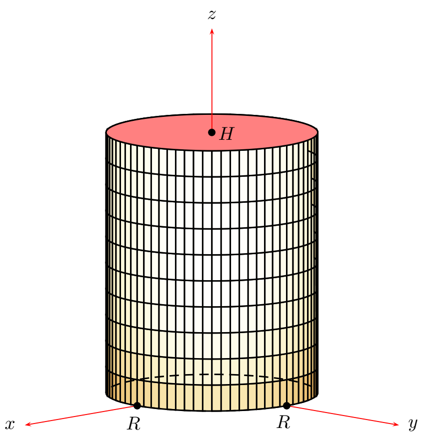
dobija se masa tijela, to jest

$$m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz .$$

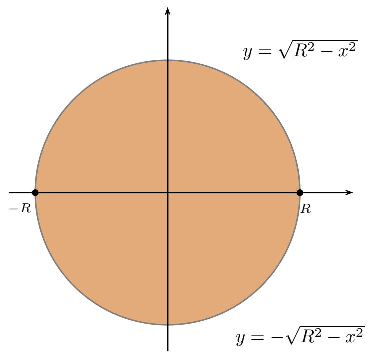
PRIMJER 15 : Izračunati masu kružnog cilindra visine H i poluprečnika osnove R kod koga je gustina u svakoj tački direktno proporcionalna rastojanju te tačke od baze cilindra.

Kako je gustina posmatranog tijela u tački proporcionalna rastojanju te tačke od baze u xOy ravni, to je $\rho(x,y,z) = kz$, gdje je k konstanta proporcionalnosti. Prema gornjem razmatranju sada imamo

$$
\begin{aligned}
m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz &= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\int_0^H kzdz\right)dy\right)dx \\
&= k\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{2}H^2dy\right)dx = kH^2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}kH^2\pi R^2 \ .
\end{aligned}
$$



(a) Kruzni cilindar visine H i poluprecnika osnove R



(b) Projekcija cilindra u xOy ravan

Moment inercije

Pod momentom inercije materijalne tačke u odnosu na pravu podrazumijeva se proizvod mase tačke i kvadrata rastojanja te tačke od prave. Moment inercije konačnog skupa materijalnih tačaka jednak je zbiru momenata pojedinačnih tačaka. U cilju definisanja i izračunavanja momenta inercije tijela, postupam na sljedeći način.

Pretpostavimo da tijelo V u prostoru $Oxyz$ ima gustinu $\rho(x,y,z)$, $(x,y,z) \in V$. Podijelimo V na manje oblsti V_i, $i = 1,2,...,n$, i izaberimo istaknute tačke (x_i, y_i, z_i) u svakoj od podoblasti V_i. Smatrat ćemo da je momenat inercije I_i dijela tijela V_i u odnosu na osu Oz ima vrijednost

$$I_i = (x_i^2 + y_i^2)\rho(x_i, y_i, z_i)mes(V_i) \ .$$

Sumirajući i prelazeći na limes, dobija se po definiciji moment unercije I datog tijela

$$I = \lim_{\max mes(V_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)\rho(x_i, y_i, z_i)mes(V_i) = \iiint_v (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz \ .$$